

85198
6. FOLGE, 1957, BAND 20, HEFT 7-8

MAR 14
1958

UNIVERSITY
OF MICHIGAN

MAR 12 1958

PHYSICS
LIBRARY

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude,
W. Wien, M. Planck, E. Grüneisen

Der ganzen Reihe 455. Band

Kuratorium:

W. GERLACH, CHR. GERTHSEN †, F. HUND,
M. v. LAUE, W. MEISSNER, R. W. POHL, R. ROMPE,
R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN
Heidelberg

F. MÖGLICH †
Berlin



JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG ' LEIPZIG

Redaktionsschluß am 30. November 1957

Inhalt

| | |
|--|-----|
| V. A. Erma, Washington und Pasadema: Zur Thomas-Fermischen Gleichung bei hohen Temperaturen | 345 |
| E. Schmutzer, Rostock: Minkowski-Elektrodynamik als Ergebnis einer feldtheoretischen Untersuchung | 349 |
| H. Simon und M. v. Heimendahl, Berlin-Buch: Über die Ausmessung von Röntgeninterferenzen mit Cadmiumsulfidzellen. Mit 18 Abbildungen.... | 355 |
| J. Pachner, Prag: Über die Kompatibilität der Feldgleichungen, Erhaltungssätze und Bewegungsgleichungen in der unitären Feldtheorie | 368 |
| K. Schuster, Jena: Turbulenz und Wellenanfachung | 381 |
| Zs. Náray, Budapest: Die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes der Sb-Cs-Photokathoden im Temperaturbereich -170° C bis $+20^{\circ}$ C. Mit 5 Abbildungen | 386 |
| W. Brauer, Berlin: Über das Bremsgesetz mittelschneller Elektronen in Metallen | 390 |
| A. Papapetrou, Berlin: Über periodische nichtsinguläre Lösungen in der allgemeinen Relativitätstheorie | 399 |
| M. Höhne, Berlin-Adlershof: Zur Abhängigkeit der Ionenleitfähigkeit des Silberbromids von der Vorgeschichte des Kristalls. Mit 16 Abbildungen..... | 412 |

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Einsendung der Manuskripte erbieten an *Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7, Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6.*

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwangslässig ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band 34.— (U. S. § 8.16) zuzügl. Postgebühren.

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

ANNALEN DER PHYSIK

6. FOLGE * BAND 20, HEFT 7-8 * 1957

Zur Thomas-Fermischen Gleichung bei hohen Temperaturen

Von Victor A. Erma

Inhaltsübersicht

Es wird eine semi-konvergente Entwicklung für das Thomas-Fermische Potential bei hohen Temperaturen hergeleitet und deren Fehler abgeschätzt. Die genannte Entwicklung wird es ermöglichen, die numerische Integration der betreffenden Gleichung derart zu behandeln, daß die Zustandsgleichung eines Elementes bei hohen Temperaturen erhalten werden kann.

Einleitung und Zusammenfassung

Die Zustandsgleichung eines Elementes bei hoher Temperatur ist an Hand des Thomas-Fermischen statistischen Atom-Modells von Feynman et al.¹⁾ diskutiert worden.

Es handelt sich dabei um die Lösung der Gleichung

$$\beta''(s) = s I_{1/4}(\beta/s), \quad (1)$$

wobei

$$I_{1/4}(\beta/s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^{x-\beta/s} + 1}. \quad (2)$$

Die Funktion $\beta(s)$ und die Variable s hängen mit dem Potential $V(r)$ und der Entfernung vom Kern, r , in folgender Weise zusammen:

$$\begin{aligned} \beta/s &= \frac{e V}{k T} - \eta \\ r = c s &= \left(\frac{h^3}{32 \pi^2 e^2 m (2 m k T)^{1/2}} \right)^{1/3} s, \end{aligned} \quad | \quad (3)$$

wobei der Parameter η durch die vorgegebene Anzahl der Elektronen bestimmt ist. Die Randbedingungen, denen β genügt, sind

$$\beta(0) = \alpha = \frac{Z e^2}{k c T} = \frac{0,0899 Z}{(T_{ke})^{3/4}} \quad | \quad (4)$$

und

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta}{s} \text{ bei } s = b,$$

wobei $a = c b$ den Atomradius bezeichnet und daher mit dem Druck und der Dichte des Stoffes zusammenhängt. Für einen vorgegebenen Wert von α ,

¹⁾ Feynman, Metropolis u. Teller, Physic. Rev. 75, 1561 (1949).

bzw. der Temperatur, entsprechen also verschiedene Werte von $\beta'(0) = a_2$ einer Schar von Punkten einer Druck-vs.-Dichte-Kurve eines bestimmten Elementes.

Die numerische Integration der Gl. (1) mit vorgegebenem α und a_2 stößt aber auf Schwierigkeiten, da sich die rechte Seite von (1) für kleine Werte von s wie $s^{-1/2}$ verhält. Für den Fall der gewöhnlichen Thomas-Fermischen und der Thomas-Fermi-Diracschen Gleichung am Temperatur-Nullpunkt ist es möglich, die entsprechenden Funktionen für sehr kleine Werte der unabhängigen Variable in semi-konvergenten Potenzreihen zu entwickeln (Cf. z. B. Feynman et al.¹⁾). Es ist das Ziel dieser Arbeit eine ähnliche Entwicklung für kleine Werte von s herzuleiten und ihre Konvergenzeigenschaften zu untersuchen. Mit Hilfe einer solchen Entwicklung, die uns eine Reihe von Anfangspunkten der Funktion $\beta(s)$ liefert, wird es dann offenbar möglich, die numerische Integration von (1) auf gewöhnlichem Wege durchzuführen.

Reihenentwicklung für $\beta(s)$

Zunächst führen wir die Differentialgleichung (1) in eine Integralgleichung über. Durch zweifache Integration und Gebrauch der Identität:

$$\int_0^x \int_0^\xi f(u) du d\xi = \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi,$$

die durch eine einfache partielle Integration geliefert wird, ergibt sich:

$$\beta(s) = \alpha + a_2 s + \int_0^s (s - \xi) \xi I_{1/4}(\beta/\xi) d\xi. \quad (5)$$

Diese Gleichung enthält keine divergenten Glieder. Wir werden sie durch eine Methode sukzessiver Approximationen analog dem Picardschen Verfahren lösen. Dazu benutzen wir eine asymptotische Reihenentwicklung für das Integral (2)²⁾:

$$I_{1/4}(\eta) = \frac{2}{3} \eta^{3/4} \left[1 + \frac{1,2337}{\eta^2} + \frac{1,06542}{\eta^4} + \dots \right]. \quad (6)$$

Der Fehler dieses Ausdrückes für große η ist von der Ordnung $e^{-\eta}$. Als Anfangsfunktion machen wir den Ansatz

$$\beta_0 = \alpha + a_2 s$$

und bestimmen die nächste Approximation $\beta_1(s)$, indem wir β_0 statt β im Integranden der Gl. (5) einsetzen. Wenn anstatt $I_{1/4}(\beta_0/s)$ die asymptotische Reihe (6) eingesetzt wird, und der ganze Integrand in Potenzen von ξ bis zu einer gewissen Ordnung entwickelt wird, erhält man nach Durchführung der jetzt elementar gewordenen Integration:

$$\beta_1(s) = \alpha + a_2 s + \frac{8}{9} (\alpha)^{3/4} s^{3/4} + \frac{4}{15} a_2 (\alpha)^{1/4} s^{5/4}. \quad (7)$$

Eine weitere Iteration dieses Verfahrens liefert auf elementare, jedoch mühselige Weise:

$$\begin{aligned} \beta_2(s) &= \alpha + a_2 s + \frac{8}{9} (\alpha)^{3/4} s^{3/4} + \frac{4}{15} a_2 (\alpha)^{1/4} s^{5/4}, \\ &+ \frac{4}{27} \alpha^2 s^3 + \frac{8}{105 \sqrt{\alpha}} \left[\frac{3}{8} (a_2)^2 + 1,2337 \right] s^{7/4} + \frac{8}{135} \alpha a_2 s^4. \end{aligned} \quad (8)$$

¹⁾ McDougall u. Stoner, Philos. Trans. Roy. Soc. London 237, 67 (1938).

Weitere Iterationen sind selbstverständlich durchführbar, obwohl der Aufwand an algebraischer Mühe sehr beträchtlich wird.

Diese Lösung ist bisher nur formal; um sie später zum Zweck einer exakten numerischen Integration anzuwenden, untersuchen wir jetzt ihre Genauigkeit

Konvergenzeigenschaften der Näherungslösung $\beta_2(s)$

Die Genauigkeit der Lösung $\beta_2(s)$ und der durch weitere Iterationen erhaltenen Lösungen wird von drei zusammenhängenden Approximationen beeinflußt: (i) Gebrauch der asymptotischen Reihe (6) statt des exakten Integrals; (ii) Gebrauch von nur zwei Stufen der sukzessiven Approximation (*a priori* ist es sogar nicht sicher, daß in diesem Fall das Picardsche Verfahren überhaupt konvergiert); (iii) in jeder Stufe des Approximationsverfahrens wird der Integrand weiter approximiert, indem wir ihn in Potenzen von ξ entwickeln, damit die Integration ermöglicht wird.

Mc Dougall und Stoner²⁾ geben den Fehler R des Ausdrückes (6) an als

$$R < 58,2 \eta^{3/2}.$$

Wir können daher s genügend klein wählen, so daß mit $\eta = \beta/s$ der Fehler R völlig unwesentlich wird und weiterhin vernachlässigt werden kann.

Zur Auswertung des Fehlers des Picardschen Verfahrens, schreiben wir (5) in der Form:

$$\beta - \beta_0 \simeq \frac{2}{3} \int_0^s \frac{(s-\xi)}{\xi^{3/2}} \beta^{3/2} d\xi. \quad (9)$$

Dabei benutzen wir nur das erste Glied der Reihe (6), welches offenbar den Hauptbetrag des Fehlers enthält. Es ist allgemein bekannt, daß $\beta(s)$ eine monotonisch abnehmende Funktion ist, so daß überall $\beta \leq \beta(0) = \alpha > 0$. Daher können wir schreiben:

$$\beta - \beta_0 \leq \frac{2}{3} \alpha^{3/2} \int_0^s \frac{(s-\xi)}{\xi^{3/2}} d\xi = \frac{8}{9} \alpha^{3/2} s^{3/2}. \quad (10)$$

Mit derselben Approximation liefert die Gl. (5) durch eine einfache Subtraktion für den Fehler von β_1 :

$$\beta - \beta_1 \simeq \frac{2}{3} \int_0^s \frac{(s-\xi)}{\xi^{3/2}} (\beta^{3/2} - \beta_0^{3/2}) d\xi. \quad (11)$$

Die Gültigkeit der folgenden Ungleichheit ist geometrisch leicht feststellbar:

$$\beta^{3/2} - \beta_0^{3/2} < \frac{3}{2} \beta^{1/2} (\beta - \beta_0); \quad \beta > \beta_0. \quad (12)$$

Benutzen wir wieder $\beta \leq \alpha$ und setzen wir (12) in (11) ein, so ergibt sich mit Hilfe von (10):

$$\beta - \beta_1 < \frac{8}{9} \alpha^2 \int_0^s (s-\xi) \xi d\xi = \frac{4}{27} \alpha^2 s^3. \quad (13)$$

Auf genau dieselbe Weise erhalten wir

$$\beta - \beta_2 < \frac{16}{1701} \alpha^{5/2} s^{5/2}. \quad (14)$$

Die Ausdrücke (10), (13) und (14) geben die Fehler der nullten, ersten und zweiten Stufen des Picardschen Verfahrens an.

In Wirklichkeit ist die Lösung (7) wie gesagt nicht der Gleichung

$$\beta_1 = \alpha + a_2 s + \int_0^s \frac{(s-\xi)}{\xi^{1/2}} \beta_0^{1/2} d\xi,$$

sondern der Gleichung

$$\beta_1^{\text{approx.}} = \alpha + a_2 s + \int_0^s \frac{(s-\xi)}{\xi^{1/2}} f_1 d\xi$$

entnommen, wobei

f_1 = Reihenentwicklung von $[\beta_0(\xi)]^{1/2}$ bis auf Glieder der Ordnung δ . Bezeichnen wir den Fehler $\beta - \beta_1$ mit δ , so wird

$$\beta - \beta_1^{\text{approx.}} = \delta + \int_0^s \frac{(s-\xi)}{\xi^{1/2}} [\beta_0^{1/2} - f_1] d\xi. \quad (15)$$

In einem gegebenen Fall wird es jetzt leicht feststellbar, daß das Integral in (15) für kleine Werte von s von kleinerer Ordnung als δ ist. Auf analoge Weise wird der Fehler von $\beta_1^{\text{approx.}}$ (vz. Formel 8) festgestellt. Der Gesamtfehler der semi-konvergenten Reihenentwicklung (8) ist somit durch (14) gegeben. Bei allen Werten von α und a_2 , die uns in bezug auf die numerische Integration von (1) zum Zweck der Erhaltung von Zustandsgleichungen interessieren, ist eine Genauigkeit bis zu 10^{-6} für $s = 0,01$ leicht erreichbar.

Washington, Naval Ordnance Laboratory, und Pasadena, California Institute of Technology.

Bei der Redaktion eingegangen am 19. Oktober 1956.

Minkowski-Elektrodynamik als Ergebnis einer feldtheoretischen Untersuchung

Von Ernst Schmutzner

Inhaltsübersicht

Die Kopplung von elektromagnetischem und Materiefeld als Analogisierung der Elektrodynamik in Medien wird allgemein untersucht. Es zeigt sich, daß nur die Abtrennung beider Felder im Sinne der Minkowskischen Elektrodynamik sinnvoll ist, wobei ein Minimum an Voraussetzungen verwendet wird. Ein Energietensor von der Struktur des Abrahamschen tritt dabei nirgends auf. Damit dürfte von feldtheoretischer Grundlage aus ein Beweis zugunsten des Minkowski-Tensors für die Mikro- und damit auch für die Makroverhältnisse erbracht sein.

§ 1. Allgemeine Gesichtspunkte

Seit etwa einem halben Jahrhundert währt die Diskussion über die Frage, welcher der verschiedenen vorgeschlagenen Energietensoren der Elektrodynamik für Medien der richtige ist. Sommerfeld bezeichnete dieses bis jetzt umstrittene Problem als einen Schönheitsfehler der Relativitätstheorie. Die Problematik liegt bekanntlich darin, daß kein zwangsläufiger Weg von den Feldgleichungen zu dem zugehörigen Energietensor ausfindig gemacht werden konnte. Besonders in letzter Zeit ist die Diskussion der damit zusammenhängenden Fragen wieder sehr lebhaft geworden. Wir wollen hier darauf verzichten, den langen historischen Entwicklungsgang dieses Problems und die im Laufe der Zeit vorgeschlagenen Lösungsversuche näher darzulegen. Die meisten dieser scheiden nämlich aus stichhaltigen Gründen sofort aus der Diskussion aus, wie man leicht einsehen kann. Lediglich der Minkowski-Tensor und der Abraham-Tensor haben das näherte Interesse der meisten Forscher auf sich gelenkt, so daß sich heute im wesentlichen die Anhänger des Minkowski-Tensors¹⁾²⁾ und des Abraham-Tensors⁴⁾⁵⁾ gegenüberstehen. Hier soll nun versucht werden, von feldtheoretischer Grundlage aus zugunsten der ersten zu entscheiden.

Im wesentlichen verwenden wir hier dieselbe Symbolik wie in zwei früheren Arbeiten⁶⁾⁷⁾, um damit auf eine nochmalige Darlegung verzichten zu können

¹⁾ M. v. Laue, Z. Physik **128**, 387 (1950).

²⁾ C. Möller, The Theory of Relativity, Oxford 1955.

³⁾ F. Beck, Z. Physik **134**, 136 (1953).

⁴⁾ G. Marx u. G. Györgyi, Acta phys. Hung. **3**, 213 (1954); Ann. Physik **16**, 214 (1955).

⁵⁾ N. L. Balazs, Physic. Rev. **91**, 408 (1953).

⁶⁾ E. Schmutzner, Z. Physik **143**, 479 (1955) (im Text mit I bezeichnet).

⁷⁾ E. Schmutzner, Ann. Physik **18**, 171 (1956) (im Text mit II bezeichnet).

(vorliegende Arbeit stellt in vielen Punkten eine Weiterführung dortiger Gedanken dar). Wir weisen lediglich darauf hin, daß die Minkowski-Koordinaten: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ verwandt werden, und ein Komma partielle Ableitungen kennzeichnet. Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf ein abgeschlossenes System, welches aus einem „Medium“ und einem elektromagnetischen Feld bestehen möge. Aus Gründen mathematischer Äquivalenz besteht bekanntlich in vielen Punkten Parallelität zu den nichtlinearen Elektrodynamiken.

Die physikalischen Eigenschaften des Gesamtsystems mögen beschrieben werden durch die sehr allgemeine, translations-, lorentz- und eichinvariante reelle Lagrangedichte:

$$\Lambda = \Lambda((\mathbf{D}_j \overset{\alpha}{\Psi}^*), (D_j \overset{\alpha}{\Psi}), \overset{\alpha}{\Psi}^* \overset{\alpha}{\Psi}, H_{ij}). \quad (1)$$

Dabei sind $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \alpha A_j$ und $\mathbf{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha A_j$ Differentialoperatoren,

die auf die das „Medium“ beschreibenden Feldfunktionen $\overset{\alpha}{\Psi}$ und $\overset{\alpha}{\Psi}^*$ mit beliebigem geometrischem Charakter wirken sollen ($\alpha = \frac{ie}{\hbar c}$, wobei die Konstanten die übliche Bedeutung besitzen). $H_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}$ gebe als elektromagnetischer Feldstärketensor die Beschaffenheit des elektromagnetischen Feldes wieder. Da bekanntlich bei Funktionssymbolen rechts unten, bzw. rechts oben stehende Indices kovariante, bzw. kontravariante Tensorkomponenten bezeichnen, haben wir bei den Feldfunktionen mit zunächst beliebigem geometrischem Charakter den laufenden Index über das Funktionssymbol gesetzt. Während also über doppelte Tensorindices von 1–4 zu summieren ist, laufen doppelte Indices über den Symbolen von 1–m, wobei m die Anzahl der komplexen Feldfunktionen angibt.

Wir erhalten dann als Feldgleichungen für das Materiefeld⁸⁾:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \overset{\alpha}{\Psi}} = \mathbf{D}_j \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial (D_j \overset{\alpha}{\Psi})} \right), \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \overset{\alpha}{\Psi}^*} = D_j \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial (\mathbf{D}_j \overset{\alpha}{\Psi}^*)} \right) \quad (2)$$

und für das elektromagnetische Feld:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial H_{j,i}} \right)_{,j}. \quad (3)$$

Gl. (3) kann einfacher geschrieben werden, wenn wir den elektromagnetischen Erregungstensor F_{ij} und den Stromdichtevektor J_i durch folgende Gleichungen definieren [vgl. II, Gl. (27)]:

$$F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial H_{j,i}} = \frac{\partial A_i}{\partial A_{i,j}}, \quad J_i = c \frac{\partial A_i}{\partial A_i}. \quad (4)$$

Wir gehen bei unseren Überlegungen aus von dem Satz von E. Noether (man vergleiche die Darstellung darüber von Hill⁹⁾), der bei Berücksichtigung der Feldgleichungen in den folgenden Erhaltungssatz übergeht ($\overset{\alpha}{U}$ sind zunächst beliebige Feldfunktionen):

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ T_{\sigma k}^{\text{can}} \Delta x_\sigma - \frac{\partial \Lambda}{\partial \overset{\alpha}{U}_{,\kappa}} \Delta \overset{\alpha}{U} - \Omega_k \right\} = 0 \text{ mit } T_{\sigma k}^{\text{can}} = \overset{\alpha}{U}_{,\sigma} \frac{\partial \Lambda}{\partial \overset{\alpha}{U}_{,\kappa}} - \Lambda \delta_{\sigma k} \quad (5)$$

⁸⁾ F. Hund, Materie als Feld, Springer-Verlag 1954.

⁹⁾ E. L. Hill, Rev. mod. Physics 28, 253 (1951).

und den Abkürzungen: $\Delta x_i = x'_i - x_i$, $\Delta \tilde{U} = \tilde{U}'(x'_i) - \tilde{U}(x_i)$. Dabei ist vorausgesetzt, daß es sich bei den verwendeten Koordinatentransformationen um sog. Symmetrietransformationen handelt. Da wir es in dieser Arbeit nur mit raumzeitlichen Translationen, raumzeitlichen Drehungen (Lorentz-Transformationen) und Eich- sowie Phasentransformationen zu tun haben werden, brauchen wir nur Forminvarianz der Lagrangedichte (1) gegen diese zu fordern. Dann können wir auch $\Omega_k = 0$ setzen.

§ 2. Energie-Impuls-Erhaltungssatz

Dieser Erhaltungssatz ist eine Folge der raumzeitlichen Translation $\Delta x_i = a_i$ und lautet für die oben angegebenen Feldfunktionen des Problems:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} T_{\sigma k}^{\text{can}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \tilde{\Psi}_{,\sigma} \frac{\partial A}{\partial \tilde{\Psi}_{,\sigma}} + \tilde{\Psi}_{,\sigma}^* \frac{\partial A}{\partial \tilde{\Psi}_{,\sigma}^*} + A_{\alpha,\sigma} \frac{\partial A}{\partial A_{\alpha,k}} - A \delta_{\sigma k} \right\} = - \left(\frac{\partial A}{\partial x_\sigma} \right)_{\text{part}} = 0. \quad (6)$$

Bei Einführung der folgenden Abkürzung $\tilde{\Pi}_k = \frac{\partial A}{\partial \tilde{\Psi}_{,\sigma}}$ können wir nun den kanonischen Energietensor einfacher schreiben:

$$T_{\sigma k}^{\text{can}} = \tilde{\Psi}_{,\sigma} \tilde{\Pi}_k + \tilde{\Psi}_{,\sigma}^* \tilde{\Pi}_k^* + A_{\alpha,\sigma} F_{\alpha k} - A \delta_{\sigma k}, \quad (7)$$

Den zugehörigen symmetrischen Energietensor (das Gesamtsystem war als abgeschlossen vorausgesetzt worden) liefert das Belinfantesche Symmetrisierungsverfahren:

$$T_{iv}^{\text{Bel}} = T_{iv}^{\text{can}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} (H_{svi} - H_{siv} + H_{ivs} - H_{isv} + H_{vis} - H_{vsi}). \quad (8)$$

Dabei ist H_{svi} durch folgende allgemeine Beziehung definiert:

$$H_{svi} = \frac{\partial A}{\partial U_{,s}} \overset{m}{U} S_{\alpha m v i}. \quad (9)$$

Die darin vorkommenden Größen $S_{\alpha m v i}$ charakterisieren die geometrischen Eigenschaften der Feldfunktionen. Man erhält sie aus der allgemeinen Definitionsgleichung:

$$\Delta \overset{m}{U} = \beta_{iv} S_{\alpha m i v} \overset{m}{U}, (\beta_{iv} \text{ Koeffizienten der raumzeitlichen Drehung}). \quad (10)$$

Beachtet man, daß speziell für Vektoren $S_{\alpha m i v} = \delta_{\alpha i} \delta_{m v}$ gilt, so erhält man durch konkretes Ausrechnen:

$$H_{k i v} = S_{\alpha m i v}^T (\tilde{\Pi}_k \overset{m}{\Psi} + \tilde{\Pi}_k^* \overset{m}{\Psi}^*) + F_{ik} A_v. \quad (11)$$

Setzt man in (8) ein, so resultiert:

$$\begin{aligned} T_{iv}^{\text{Bel}} &= \tilde{\Psi}_{,\sigma} \tilde{\Pi}_v + \tilde{\Psi}_{,\sigma}^* \tilde{\Pi}_v^* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} [(S_{\alpha m i v}^T - S_{\alpha m i v}) (\tilde{\Pi}_s \overset{m}{\Psi} + \tilde{\Pi}_s^* \overset{m}{\Psi}^*) + \\ &+ (S_{\alpha m v s}^T - S_{\alpha m s v}^T) (\tilde{\Pi}_i \overset{m}{\Psi} + \tilde{\Pi}_i^* \overset{m}{\Psi}^*) + (S_{\alpha m i s}^T - S_{\alpha m s i}^T) (\tilde{\Pi}_v \overset{m}{\Psi} + \tilde{\Pi}_v^* \overset{m}{\Psi}^*)] \\ &+ F_{\alpha v} H_{i \alpha} + \frac{1}{c} J_v A_i - A \delta_{iv}. \end{aligned} \quad (12)$$

In diesem Zusammenhang interessiert nun die Frage, ob dieser Tensor auch eichinvariant ist. Man kann diese Eigenschaft folgendermaßen zeigen: Definiert man den eichinvarianten kanonischen Tensor durch folgende Gleichung:

$$T_{\mu\nu}^{\text{can, eich}} = (D_\mu \overset{\beta}{\Psi}) \frac{\partial A}{\partial (D_\nu \overset{\beta}{\Psi})} + (D_\mu \overset{\beta}{\Psi}*) \frac{\partial A}{\partial (D_\nu \overset{\beta}{\Psi}*)} - \delta_{\mu\nu} A, \quad (13)$$

so findet man nach einigen Umformungen:

$$T_{\mu\nu}^{\text{can, eich}} = T_{\mu\nu}^{\text{can}} + \frac{A_\mu}{c} J_\nu - F_{\alpha\nu} A_{\alpha\mu}, \text{ da } J_\nu = \alpha c (\overset{\beta}{\Psi}*\overset{\beta}{\Pi}_v^\mu - \overset{\beta}{\Psi}\overset{\beta}{\Pi}_v^\mu) \text{ ist.} \quad (14)$$

Beachtet man ferner, daß die Ausdrücke

$$H_{kiv}^{\text{eich}} = S_{\alpha m i v}^T (\overset{\alpha}{\Pi}_k \overset{m}{\Psi} + \overset{\alpha}{\Pi}_k^* \overset{m}{\Psi}*)$$

eichinvariant sind, so kann man den Belinfante-Tensor in einer Form schreiben, die nur eichinvariante Glieder enthält:

$$\begin{aligned} T_{iv}^{\text{Bel}} = T_{iv}^{\text{can, eich}} &+ \frac{1}{2} (H_{svi}^{\text{eich}} - H_{svi}^{\text{eich}} + H_{ivs}^{\text{eich}} - H_{ivs}^{\text{eich}} + H_{vis}^{\text{eich}} - H_{vis}^{\text{eich}}),_s \\ &+ F_{vs} H_{sv}. \end{aligned} \quad (15)$$

Dabei wurde von den Feldgleichungen (3) Gebrauch gemacht.

Für die weiteren Rechnungen machen wir nun die später zu begründende, physikalisch aber gleich einleuchtende Annahme, daß sich die Lagrangedichte in einen Feldanteil und einen Mediumanteil trennen läßt:

$$A = A^F (H_{ik}) + A^\theta ((D_j \overset{\alpha}{\Psi}), (D_j \overset{\alpha}{\Psi}^*), \overset{\alpha}{\Psi}*, \overset{\alpha}{\Psi}). \quad (16)$$

Die nächstliegende Trennung des Belinfante-Tensors (12) ist nun die folgende:

$$T_{iv}^{\text{Bel}} = E_{iv}^M + \theta_{iv} \quad (17)$$

mit

$$E_{iv}^M = H_{i\alpha} F_{\alpha v} - A^F \delta_{iv} \quad (\text{Minkowski-Dällenbach-Tensor}) \quad (18)$$

und

$$\begin{aligned} \theta_{iv} = & \overset{\alpha}{\Psi}_{,i} \overset{\alpha}{\Pi}_v + \overset{\alpha}{\Psi}_{,i}^* \overset{\alpha}{\Pi}_v^* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} [(S_{\alpha m e i}^T - S_{\alpha m i e}^T) (\overset{\alpha}{\Pi}_s \overset{m}{\Psi} + \overset{\alpha}{\Pi}_s^* \overset{m}{\Psi}*) + \\ & + (S_{\alpha m r s}^T - S_{\alpha m s r}^T) (\overset{\alpha}{\Pi}_r \overset{m}{\Psi} + \overset{\alpha}{\Pi}_r^* \overset{m}{\Psi}*) + (S_{\alpha m i s}^T - S_{\alpha m s i}^T) (\overset{\alpha}{\Pi}_s \overset{m}{\Psi} + \overset{\alpha}{\Pi}_s^* \overset{m}{\Psi}*)] + \\ & + \frac{1}{c} J_v A_i - A^\theta \delta_{iv} \quad (\text{Materiefeld-Tensor}). \end{aligned} \quad (19)$$

Da der Minkowski-Dällenbach-Tensor eichinvariant ist, muß es also auch der Materiefeld-Tensor sein. Man erkennt daraus, daß sich die durchgeföhrte Aufteilung des Gesamtensors in der obigen Art zwangsläufig ergibt, denn ein Tensor von der Struktur des Abraham-Tensors, dem man die folgende Form geben kann:

$$\begin{aligned} E_{iv}^{\text{Abr}} = & \frac{1}{2} (H_{i\alpha} F_{\alpha v} + H_{v\alpha} F_{\alpha i}) + \frac{u_\lambda u_v}{2 c^2} [H_{i\alpha} F_{\sigma\lambda} - H_{\sigma\alpha} F_{i\lambda}] + \\ & + \frac{u_\lambda u_i}{2 c^2} [H_{v\alpha} F_{\sigma\lambda} - H_{\sigma\alpha} F_{v\lambda}] - A^F \delta_{iv} \end{aligned} \quad (20)$$

und der also noch die Vierergeschwindigkeit u_i enthält, tritt im Gesamttensor gar nicht in Erscheinung.

Die Trennung in beide Anteile wurde also so durchgeführt, daß alle Glieder, die Ψ -Funktionen enthielten, zu dem Materiefeld-Tensor gerechnet wurden. Das entspricht der physikalischen Tatsache, daß die Trennung von Feld und Medium bestimmt ist durch die Kraftwirkung des Feldes auf das Medium (charakterisiert durch die Ψ -Funktionen enthaltenden Glieder). Um diese Argumentation zu erhärten, vollziehen wir — der Einfachheit halber für ein skalares Materiefeld — den Übergang zur klassischen Mechanik, ähnlich wie in der Arbeit I. Bei Verwendung der dortigen Bezeichnung [vgl. Gl. (29), (35) und (36)] resultiert dann nach einiger Rechnung mit Hilfe der Lagragedichte für skalare Materie:

$$\Lambda^0 = k [(\mathbf{D}_i \Psi^*) (D_j \Psi) - \epsilon \Psi^* \Psi]$$

das Ergebnis:

$$\theta_{iv} = S_{iv} \rightarrow -\mu_0 u_i u_v \quad (21)$$

(μ_0 Ruhdichte der Masse des Mediums, vgl. Interpretation in I).

Daraus erhält man dann durch Divergenzbildung die folgende Bewegungsgleichung:

$$\frac{d(\mu_0 u_i)}{dx_v} = \frac{\partial E_{iv}^M}{\partial x_v}, \quad \text{denn} \quad \frac{\partial T_{iv}^{\text{Bel}}}{\partial x_v} = 0, \quad (22)$$

also die elektromagnetische Kraftdichte der Minkowskischen Elektrodynamik.

§ 3. Drehimpuls-Schwerpunkts-Erhaltungssatz

Dieser Erhaltungssatz ist eine Folge der raumzeitlichen Drehung (Lorentz-Transformation), definiert durch $\Delta x_i = \beta_{i\alpha} x_\alpha$, $\Delta \tilde{\Psi} = \beta_{iv} S_{\alpha m i v}^{\Psi} \tilde{\Psi}$, wobei $\beta_{i\alpha} = -\beta_{\alpha i}$ ist.

Der Noethersche Satz (5) nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ (x_v T_{ik}^{\text{can}} - x_i T_{vk}^{\text{can}}) + S_{vik} \right\} = 0, \quad (23)$$

wobei S_{vik} durch die Relation

$$S_{ivk} = H_{kiv} - H_{ivi} \quad (24)$$

gegeben ist. Den Drehimpulstensor

$$D_{vik} = \frac{i}{c} \left\{ (x_v T_{ik}^{\text{can}} - x_i T_{vk}^{\text{can}}) + S_{vik} \right\} \quad (25)$$

kann man nun mit Hilfe der Beziehung

$$T_{iv}^{\text{Bel}} = T_{iv}^{\text{can}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} (S_{vis} + S_{vsi} + S_{isv}) = \theta_{iv} + E_{iv}^M \quad (26)$$

in solch einer Form schreiben, daß bei Verwendung der Abkürzungen:

$$\begin{aligned} t_i^M &= \frac{\partial E_{iv}^M}{\partial x_k} && (\text{Minkowskische Kraftdichte}) \\ t_i^0 &= \frac{\partial \theta_{iv}}{\partial x_k} && (\text{Mechanische Kraftdichte}) \end{aligned} \quad (27)$$

durch Divergenzbildung die folgende Formel für den verschwindenden Drehmomententensor des Gesamtsystems entsteht:

$$\begin{aligned} M_{iv} = \frac{c}{i} D_{v i k, k} &= (\theta_{iv} - \theta_{vi}) + (x_v t_i^\theta - x_i t_v^\theta) + (E_{iv}^M - E_{vi}^M) \\ &\quad + (x_v t_i^M - x_i t_v^M). \end{aligned} \quad (28)$$

Aus ähnlichen Gründen wie in § 2 soll nun die folgende Trennung in Drehmomententensor des Feldes M_{ik}^F und Drehmomententensor des Mediums M_{ik}^θ vorgenommen werden:

$$M_{ik}^F = E_{ik}^M - E_{ki}^M + (x_k t_i^M - x_i t_k^M), \quad (29)$$

$$M_{ik}^\theta = \theta_{ik} - \theta_{ki} + (x_k t_i^\theta - x_i t_k^\theta), \quad (30)$$

so daß insgesamt gilt:

$$M_{ik} = M_{ik}^F + M_{ik}^\theta = 0.$$

Als Erhärting der Richtigkeit dieser Aufteilung vollziehen wir wieder wie oben für skalare Materie den Übergang zur klassischen Mechanik:

$$\theta_{iv} \rightarrow S_{iv}, \text{ wobei } S_{iv} = S_{vi}. \quad (31)$$

Korrespondenzmäßig erhalten wir dann wegen (21):

$$t_i^\theta \rightarrow -\frac{d}{d\tau}(\mu_0 u_i); \quad (32)$$

also resultiert aus (28):

$$x_v \frac{d}{d\tau}(\mu_0 u_i) - x_i \frac{d}{d\tau}(\mu_0 u_v) = E_{iv}^M - E_{vi}^M + (x_v t_i^M - x_i t_v^M). \quad (33)$$

Wenden wir diese Beziehung auf eine homogene anisotrope Kugel im elektrischen Feld an, so entsteht daraus wegen $t_i^M = 0$ bei Beachtung der Komponenten des Minkowski-Tensors:

$$r \times t^\theta = \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} \quad (\mathfrak{P} \text{ elektrische Polarisation}). \quad (34)$$

Durch Integration über die Gesamtkugel folgt schließlich für das auf die Kugel ausgeübte Drehmoment \mathfrak{M} das experimentell gesicherte Ergebnis:

$$\mathfrak{M} = m^{el} \times \mathfrak{E}, \quad (35)$$

wobei m^{el} das elektrische Dipolmoment der Kugel bedeutet.

Damit ist gezeigt, daß auch obige Zerlegung des Drehmomententensors in Feld- und Mediumanteil sinnvoll ist. Die Einzelbestandteile M_{ik}^F und M_{ik}^θ sind außerdem auch eichinvariant.

Herrn Professor Dr. Falkenhagen gilt mein herzlichster Dank für die Möglichkeit, an seinem Institut obige Probleme zu untersuchen.

Rostock, Institut für theoretische Physik der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 18. Februar 1957.

Dreh-

(28)

Dreh-
iums

(29)

(30)

wie

(31)

(32)

(33)

ektri-

mpo-

(34)

f die

(35)

nsors

und

: die

Über die Ausmessung von Röntgeninterferenzen mit Cadmiumsulfidzellen¹⁾

Von H. Simon und M. v. Heimendahl

Mit 18 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Durch umfangreiche Untersuchungen war festgestellt worden²⁾, daß die in unserem Institut hergestellten CdS-Zellen eine ausgezeichnete Proportionalität zwischen eingestrahlter Röntgenenergie und ausgelöstem Photoleitfähigkeitsstrom besitzen. Es war daher anzunehmen, daß die Ausmessung von Röntgeninterferenzen mit CdS-Zellen durchgeführt werden kann. Die hohe Empfindlichkeit und gute Konstanz der CdS-Zellen, auch für Röntgenstrahlen, ließ vermuten, daß sich auch relativ kleine Intensitäten messen lassen. Die erste Aufgabe war daher festzustellen, ob die Intensität der Reflexe, und zwar auch sehr schwacher Reflexe ausreicht, genügend große Leitfähigkeitsströme auszulösen, so daß man sie entweder direkt mit dem Galvanometer oder mit Hilfe eines Verstärkers genau messen kann. Orientierende Vorversuche bestätigten dies, so daß man an den Bau einer Röntgenkammer mit CdS-Zelle an Stelle des Filmes herangehen konnte.

Der Einfachheit halber wurde eine normale Kammer benutzt, wie sie von der Industrie geliefert wird. Der Deckel wurde so ausgebildet, daß man zentral einen sowohl horizontal wie auch vertikal beweglichen Träger einführt, der an einem Schwenkarm die Meßzelle trug, wie dies in Abb. 1 schematisch dargestellt ist. Die Meßanordnung ist sehr einfach. Das von der Röntgenröhre ausgehende Strahlenbündel trifft sorgfältig ausgeblendet auf den Kristall K, der die Röntgeninterferenzreflexe erzeugt. Man stellt die CdS-Zelle Z

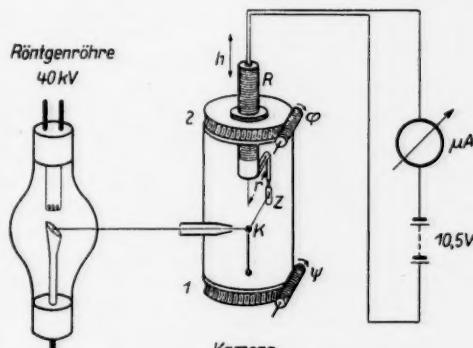


Abb. 1. Schematische Darstellung der Meßanordnung

¹⁾ Vortrag gehalten auf der Physikertagung in Leipzig im April 1956.

²⁾ H. Simon, Ann. Physik 6, 45 (1953).

z. B. auf den Äquator ein. Mit Hilfe eines Schneckengetriebes 2 wird die Zelle langsam geschwenkt bis sie auf den ersten Reflex trifft, der einen entsprechenden Photozellenstrom auslöst. Die Zelle ist direkt in Serie mit einer 10-Volt-Batterie an ein empfindliches Galvanometer angeschlossen. An Stelle des Galvanometers kann auch ein Verstärker eingeschaltet werden.

Die Zelle übt also dieselbe Funktion aus wie ein Zählrohr oder eine Ionisationskammer. Sie liefert allerdings wesentlich höhere Meßströme. Gegenüber dem ruhenden Film mit Ausphotometrieren hat sie folgende Vorteile:

1. Die Lage und die Intensität der einzelnen Reflexe wird unmittelbar bestimmt.
2. Die Fehler, die durch die Schwärzungskurve eingehen können, fallen fort.
3. Bei Verwendung von Registriergeräten werden die Aufnahmezeiten kürzer.
4. Es lassen sich eine Reihe von Messungen durchführen, die mit ruhendem Film nicht möglich sind.
5. Die Apparatur läßt sich als Kristallspektrograph verwenden, sofern man dafür sorgt, daß durch ein Getriebe Kristall und Zelle im Verhältnis 1:2 gedreht werden.

Der Film mißt Intensität mal Zeit. Die Zelle dagegen direkt Intensität – mindestens in genau relativen Werten. Die Filmaufnahme hat scheinbar den

Vorteil, durch sehr lange Belichtungen auch kleinere Intensitäten zu registrieren. Allerdings kann die Bestrahlungszeit nicht beliebig lang gewählt werden, da mit der Zeit auch die Untergrundschwärzung zunimmt und hierdurch eine Grenze für sehr kleine Intensitäten gegeben ist. Die Grenze der Empfindlichkeit der CdS-Zelle wird durch die Größe des Dunkelstromes bestimmt, der im allgemeinen von der Herstellung der Kristalle abhängt. Durch eingehende Versuche ist es gelungen, Kristalle zu züchten und daraus Photozellen herzustellen, deren Eigenschaften über lange Zeiträume konstant bleiben. Bei 10,5 Volt Saugspannung beträgt der Dunkelstrom 1 bis $2 \cdot 10^{-9}$ A.

Da eine CdS-Zelle Momentanwerte anzeigt, muß während der ganzen Messung die Betriebsspannung außerordentlich konstant gehalten werden. Ist das nicht der Fall, so müssen besonders die Veränderungen des Elektronenstromes der Glühkathode der Röntgenröhre berücksichtigt werden, da dieser die bei weitem größte Änderung erfährt. In der Abb. 2 sind drei Charakteristi-

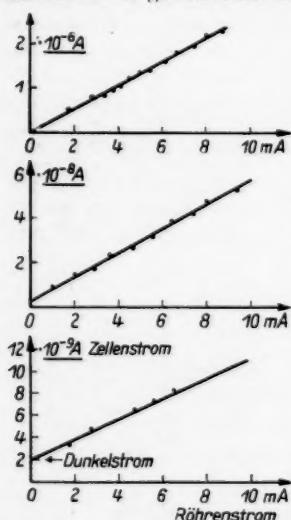


Abb. 2. Abhängigkeit des CdS-Zellenstromes von der eingeschalteten Intensität in drei Intensitätsbereichen

stiken wiedergegeben, und zwar für 3 Reflexe, deren erster Ströme von 10^{-6} A, deren zweiter von 10^{-8} A und deren dritter von 10^{-9} A auslöst. Die Intensität der Reflexe wurde dadurch geändert, daß der Emissionsstrom der Röntgen-

die
nen
mit
sen.
den.
isa-
ber
bar
len
ten
em
ern
1:2
en
ch
ver-
pig
die
ver-
n-
d-
Be
e-
b-
e-
us
en
ei
-
l-

p-
or
n-
r-
a-
t-
t-
die verändert wurde (Abszisse). Die Spannung an der Röntgenröhre betrug 40 kV, der Röhrenstrom wurde jeweils von 1 bis 10 mA variiert. Alle drei Kurven zeigen eine gute Proportionalität zwischen Zellenstrom und Bestrahlungsintensität.

Bei Schwankungen des Röhrenstroms ist also gleichzeitig mit dem Zellenstrom der Röntgenröhrenstrom abzulesen. Infolge der guten Proportionalität kann man dann die Umrechnung auf konstanten Röhrenstrom direkt durchführen. Es gibt aber bereits eine große Anzahl von Schaltungen, die die Netzspannung hinreichend konstant halten, so daß auch die Röntgenröhrenspannung und der Röntgenröhrenstrom genügend konstant bleiben.

Bei den ersten Messungen wurden daher Emissionsstrom und Zellenstrom gleichzeitig abgelesen. Wenn dieser von den geforderten 8 mA abwich, so wurde die entsprechende Umrechnung vorgenommen, da sie auf Grund der Proportionalität der Zelle erlaubt war. Bei dieser Methode ergab sich ein Gesamtfehler von weniger als 4%. Innerhalb dieses Fehlers waren alle Messungen recht gut reproduzierbar.

Im allgemeinen liegt das Milliamperemeter auf der Kathodenseite der Röntgenröhre, d. h. also auf Hochspannung gegen Erde und ist meistens so angeordnet, daß eine gleichzeitige genaue Ablesung von Röhrenstrom und Zellenstrom erschwert ist. Daher wurde in die Erdleitung der Röntgenröhre ein Widerstand von $10\text{ k}\Omega$ fest eingebaut und parallel dazu das Galvanometer geschaltet, vgl. Abb. 3, um ohne Unterbrechung der Erdleitung die verschiedenen Bereiche des Galvanometers schalten zu können. Der parallel zum $\text{k}\Omega$ -Widerstand liegende Wasserwiderstand (Kühlwasserleitung für die Anode), der etwa 250 bis 500 $\text{k}\Omega$ beträgt, kann vernachlässigt werden.

Eine in unserer Werkstatt hergestellte technische Ausführung der Meßkammer ist in Abb. 4 wiedergegeben. Das Gehäuse 1 trägt den Halter 2 für die CdS-Zelle, die mit Hilfe des Schraubentriebes 3 vertikal verstellt werden kann. Der Schneckentrieb 4 überträgt die horizontale Drehung. Die Winkelstellung wird an der links auf der Achse liegenden Scheibe abgelesen. Der Kristall sitzt auf dem Goniometerkopf 5 und kann durch den Schneckentrieb 6 gedreht werden. Für Aufnahme von Spektrogrammen können die beiden Triebe 4 und 6 mittels der Kuppelung 7 verbunden werden, so daß bei Antrieb von 7 das Verhältnis der Umdrehungszahlen von Kristall und Zelle sich wie 1:2 verhält. Die Winkel wurden durch Zählen der Umdrehungen und Ablesen der Teilstriche auf der Scheibe gemessen. Eine

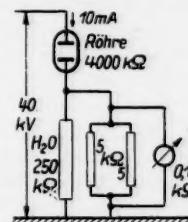


Abb. 3. Meßschaltung für den Elektronenstrom der Röntgenröhrenglühkathode

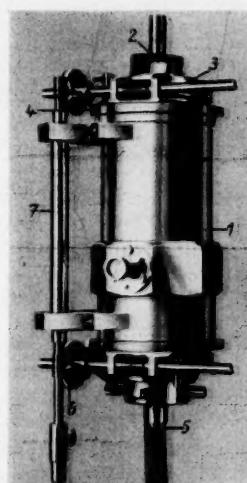


Abb. 4. Techn. Strukturkammer mit CdS-Zelle

Umdrehung betrug $2,25^\circ$. Beträgt z. B. die Breite eines Reflexes etwa 1° , was bei den üblichen Drehkristallkammern auf dem Film etwa $\frac{1}{2}$ mm ergibt, so beträgt die Drehung der Spindel etwas weniger als $\frac{1}{2}$ Umdrehung oder xx Teilstriche, d. h. es konnte eine genügend genaue Ablesung des Winkels bei maximalem Stromauschlag erzielt werden.

Für vollautomatische Aufnahme von Diagrammen wird die Kamera mit einem Synchronmotorantrieb ausgerüstet und der CdS-Zellenstrom von einem hierzu synchron angetriebenen Schreiber aufgezeichnet. Die im nachfolgenden wiedergegebenen Messungen wurden allerdings noch von Hand langsam gedreht und die CdS-Zellenstromwerte als Funktion der betreffenden Drehwinkel abgelesen.

Die Messungen wurden mit einer zweifentstrigen Phoenix-Feinstruktur-röhre mit Kupferanode durchgeführt. Die Spannung betrug immer 40 kV und der Strom 8 mA. Für Drehkristallaufnahmen und Debye-Scherrer-Aufnahmen wurde die Strahlung durch Ni-Filter homogenisiert, um möglichst nur die K_α -Strahlung zur Wirksamkeit kommen zu lassen.

Drehkristall-Aufnahme

Die Drehkristallaufnahmen wurden von selbst gezüchteten NaCl-Einkristallen gewonnen. Zur Kontrolle wurden photographische Aufnahmen gemacht, vgl. Abb. 5 und ausphotometriert. Um die Streustrahlung auszuschalten, wurde der Film mit einer dünnen Al-Folie bedeckt und ebenso die CdS-Zelle mit einer Al-Folie umgeben. Es wurde die nulle Schichtlinie zur Auswertung benutzt. Bei der Messung mit Zelle wurde diese durch Drehung der oberen Schneckenwelle (Winkel φ) an den geometrischen Ort des ersten Reflexes (200) gebracht, der durch den Primärstrahl festgelegt ist (hier $16^\circ = 14,2$ Umdrehungen vom Ursprung entfernt).

Dann dreht man den Kristall (Winkel ψ) in jenem 90° -Intervall (das auch bei der Drehkristallaufnahme mittels Film zugrunde lag) so lange, bis der Kristall in Reflexstellung kommt – dann schlägt das Mikroamperemeter aus, während es vorher in O-Stellung war. Nun stellt man φ ein wenig nach, da die Zelle ja erst nicht genau am Ort des Reflexes war; dann wird wieder nachgestellt bis man durch solche Feineinstellungen den größtmöglichen und reproduzierbaren Ausschlag erhält.

Nach diesem Verfahren werden nun alle Drehkristallreflexe registriert und quantitativ gemessen. Natürlich kommt ein Kristall mit vierzähliger Symmetrie für $\psi + 90^\circ$ erneut zur Reflexion, wir müssen uns aber auf das Intervall beschränken, das auch der Filmaufnahme zugrunde lag.

Die Registrierung mit der neuen Kammer und CdS-Zelle ist in Abb. 6 wiedergegeben. Zum Vergleich wurde die rechte Seite der Abb. 5 photometriert darunter abgebildet.

Die Ebenen hkl und khl bei der Drehkristallaufnahme liefern nur einen Reflex, da sie den gleichen Wert für $\sin \theta$ ergeben. Im Fall der Ebenen 200 und 020 trägt aber effektiv nur eine zur Interferenzbildung bei, da 200 und 020 senkrecht aufeinanderstehen und wir den Kristall nur in einem Schwenk-



Abb. 5. Drehkristallaufnahme am NaCl. 40 kV, 8 mA, 40 min

bereic
die ü
Ande

Abb.
10,5
Refle

vers
Ebe
wirkt
der
Abbr
kel
den
um
dure
men
Wir

und
bes
die
Sie
tren
num
Kri

Film
get
gen

bereich von 90° drehen, da in ihm bereits alle möglichen Stellungen vorkommen, die überhaupt entstehen können. Dasselbe gilt für alle Ebenen $h0l$ sowie $hh\bar{l}$. Anders ist es aber für die Ebenen hkl mit h verschieden von k , sowie h und k

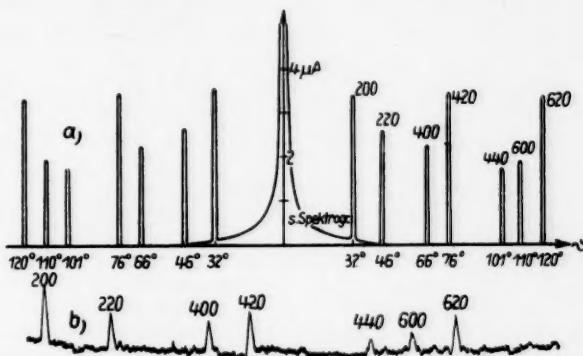


Abb. 6. Drehkristallmethode, 40 kV, 8 mA, Cu-K homogene Strahlung (Ni-Filter), 10,5 V Saugspannung. NaCl-Kristall wird gedreht bis die betreffende Netzebene zur Reflexion kommt. In 420 und 620 zwei Einzelbeiträge (420 und 240) getrennt messbar. Aufnahme mit CdS-Zelle 6a. Unten Filmauswertung der rechten Seite 6b

verschieden von 0, also z. B. die Ebenen 240 und 260. Ferner bilden die Ebenen 240 und 420 einen Winkel $\varphi < 90^\circ$ miteinander und kommen also wirklich zweimal zur Reflexion. Diese zweimalige Reflexion wurde auch bei der CdS-Zellenmessung tatsächlich bestätigt. Nach Abb. 7 bilden die Ebenensysteme 240, 420 einen Winkel von $36,8^\circ$ miteinander, und wirklich müßte man den NaCl-Kristall um $16,5$ Umdrehungen = 37° drehen, um bei gleicher Einstellung der Zelle vom Ausschlag durch die Ebene 240 zu dem der Ebene 420 zu kommen. Für 620 und 260 beträgt der eingeschlossene Winkel analog

$$\varphi = \arctg 3 - \arctg \frac{1}{3} = 54,0^\circ \quad (1)$$

und dieser Wert wurde ebenfalls experimentell genau bestätigt. Hier zeigt sich zum ersten Male deutlich die prinzipielle Überlegenheit der CdS-Zelle gegenüber dem ruhenden Film: Sie leistet hier etwas, was diesem überhaupt ganz versagt ist, nämlich die getrennte Messung der Einzelbeiträge der Ebenen, während der Film für diese nur die Summe aller Reflexe intensitätsmäßig erfaßt, die bei Drehungen des Kristalls nach und nach möglich sind³⁾.

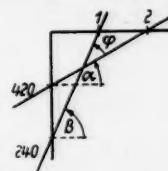


Abb. 7. $\varphi = \beta - \alpha$,
 $\operatorname{tg} \beta = 2$, $\beta = 63,4^\circ$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = 26,6^\circ$,
 $\varphi = 36,8^\circ$, gemessen 37°

³⁾ Allerdings bietet das Goniometerverfahren, bei dem während der Aufnahme der Film in seiner eigenen Ebene gedreht oder verschoben wird, auch die Möglichkeit eine getrennte Messung von hkl und $kh\bar{l}$ durchzuführen. Es ist aber umständlich, und die allgemeinen Nachteile des Films bleiben bestehen.

Auf diese Weise wurden die folgenden Meßresultate gewonnen:

Tabelle 1

| $h k l$ | $h^2 + k^2 + l^2$ | $\sin \vartheta$ | ϑ | Umdr. | Film Photom. Intensität Ausschläge in cm | CdS-Zelle rechts links $\cdot 10^{-6} \text{ A}$ |
|---------|-------------------|------------------|-------------|-------|--|--|
| 2 0 0 | 4 | 0,233 | 16,0 | 14,2 | 3,8 | 3,4 3,5 |
| 2 2 0 | 8 | 0,387 | 22,8 | 20,2 | 2,5 | 2,6 2,6 |
| 4 0 0 | 16 | 0,547 | 33,2 | 29,5 | 2,2 | 2,2 2,2 |
| 4 2 0 | 20 | 0,610 | 37,5 | 33,3 | 1,6 | 1,7 1,7 |
| 2 4 0 | 20 | 0,610 | 37,5 | 33,3 | 3,0 | 1,8 1,8 |
| 4 4 0 | 32 | 0,773 | 50,6 | 45,0 | 1,4 | 1,7 1,7 |
| 6 0 0 | 36 | 0,818 | 54,9 | 48,8 | 1,5 | 1,9 1,9 |
| 6 2 0 | 40 | 0,865 | 59,9 | 53,3 | 2,9 | 1,6 1,6 |
| 2 6 0 | 40 | 0,865 | 59,9 | 53,3 | | 1,8 1,7 |

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{2a} \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}, \quad \lambda = 1,539 \text{ \AA}, \quad a = 5,63 \text{ \AA}. \quad (2)$$

Die Zahl der Umdrehungen stimmte in jedem Fall mit der theoretisch berechneten völlig überein. Die gemessenen Intensitäten werden nun mit denen verglichen, die sich aus der Photometrierung des Film ergeben, wobei darauf geachtet wurde, daß man sich stets im linearen Gebiet der Schwärzungskurve befand. So können die Ausschläge direkt miteinander verglichen werden. Das Resultat ergibt eine verhältnismäßig gute Übereinstimmung, die im

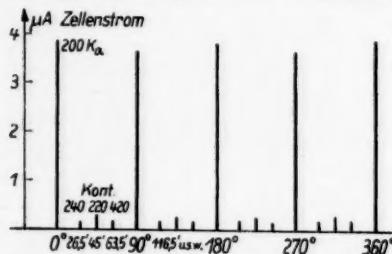


Abb. 8. Ruhende Zelle — gedrehter Kristall. CdS-Zelle fest am Ort des Reflexes NaCl-200 bei Cu-K α , d. h. 32° gegen Achse. NaCl-Kristall wird um 360° gedreht. Dabei kommen außer 200 die Ebenen 240, 220, 420 für die entsprechenden Winkel im kontinuierlichen Spektrum meßbar zur Reflexion. Vierzählig Symmetrie. Diagramm dieser Art mit (ruhendem) Film unmöglich. 40 kV, 8 mA ohne Filter

Zur Probe wurden noch einige andere Schichtlinien gemessen. Wie zu erwarten, gaben die der zweiten Schichtlinie ebenfalls Werte in der Größenordnung von 10^{-6} A , während die der ersten Schichtlinie im Durchschnitt um mindestens eine Zehnerpotenz niedriger lagen.

Bei dem folgenden Diagramm Abb. 8, wurde die CdS-Zelle am Ort des Reflexes 200 fixiert und der NaCl-Kristall langsam ganz um seine Achse gedreht (360°). Die Ni-Filterung der Röntgenstrahlen wurde fortgelassen. Infolge der vierzähligen Symmetrie erscheint jeweils nach einer Drehung um

Rahmen der Fehlernähe liegt (s. Tab. 1). Ferner konnte festgestellt werden, daß für kleiner werdende ϑ die photometrierten Intensitäten relativ ein wenig größer erscheinen als die Ergebnisse der Zellmessung. Das ist lediglich eine Folge der von der ideal runden Säule abweichenden Kristallform, also eine Frage der Geometrie. Ferner gehen die verschiedenen Spaltbreiten von Photometer und Zelle ein. Bei der Aufnahme eines Debye - Scherrer - Diagramms von einem gezogenen Cu-Draht, also von einem völlig runden Präparat, wurde eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Methoden erzielt.

90° e
groß
Strah
schie

D
in de
lang
200-J
gena
NaCl
flexi
I
so tr
Ebe
dem
nur
diese

die

spe
sitä
für
Ne
lich
erk
ist
10-

wü
nu
sim
no
für
se
Pr

üb
eve
ra
wi

90° erneut die Reflexion der Ebene 200. Die vier Ausschläge sind nicht gleich groß, da die äußeren Konturen des Kristalls nicht gleich sind und der Weg des Strahls durch den Kristall und damit die Absorption jedesmal ein wenig verschieden ist.

Die Ebenen 200 bringen hier die K_{α} -Strahlung zur Reflexion und rufen in der CdS-Zelle Ströme von $4 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ hervor. Außerdem aber wurde beim langsamen Durchdrehen des Kristalls jeweils bei $26,6^\circ$ und $63,4^\circ$ nach den 200-Reflexen noch ein kleiner Ausschlag von $0,17 \mu\text{A}$ festgestellt und ferner genau in der Mitte, nach 45° ein Ausschlag von $0,25 \mu\text{A}$. Insgesamt kam der NaCl-Kristall also für $2\vartheta = 32^\circ = \varphi$ bei einem Vollkreis (ψ) 16mal zur Reflexion!

Da hier dieselben Winkel auftreten, deren Tangens genau $1/2$ bzw. 2 ist, so treten wieder die Netzebenen 240 und 420 in Reflexionsstellung (denn die Ebenen 200 sind parallel zu den Flächen der Elementarzelle und mithin auch dem Koordinatensystem). Für die Reflexion nach einer Drehung um 45° kann nur dasjenige Ebenensystem in Frage kommen, das mit der Ebene 200 eben diesen Winkel einschließt. Das ist aber die Netzebene 220.

Berechnen wir nun aus

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{2a} \cdot \sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \quad (2)$$

die Wellenlängen, die hier reflektieren, so folgt für

$$(240) \quad \lambda = \frac{2 \cdot 5,63 \cdot 0,273}{\sqrt{20}} = 0,69 \text{ \AA}$$

$$(220) \quad \lambda = \frac{2 \cdot 5,63 \cdot 0,273}{\sqrt{8}} = 1,08 \text{ \AA}.$$

Es kommen also hier Bestandteile des kontinuierlichen Spektrums (Bremspektrums) zur Reflexion (Laue-Reflexe), das ja eine viel geringere Intensität als die K_{α} -Linie hat. Zwar ist die Intensität des Bremspektrums (Abb. 9) für $0,69 \text{ \AA}$ größer als für $1,08 \text{ \AA}$, aber die Netzebenen 220 sind andererseits wesentlich dichter besetzt als 240, und so ist es zu erklären, daß der Ausschlag in 220 größer ist ($0,25 \cdot 10^{-6} \text{ A}$) als in 240 bzw. 420 ($0,17 \cdot 10^{-6} \text{ A}$).

Bei genauerer Betrachtung und Messung würde man natürlich feststellen, daß nicht nur bei $26,4^\circ$, 45° und $63,6^\circ$ Reflexe meßbar sind, sondern noch mehr, da es nach (2) noch mehrere Netzebenen geben wird, die für ein $\sin \vartheta = 0,273$ ein λ aus dem Bremspektrum liefern. Nur sind ihre Beiträge wegen ihrer viel schwächeren Besetzung mit Atomen noch viel kleiner, und uns kommt es hier nur auf das Prinzip an.

Ein Diagramm dieser Art kann auch wieder mit einem normalen Film überhaupt nicht aufgenommen werden. Sein Wert liegt darin, daß man eine eventuell vermutete Kristallklasse bei einem Einkristall mittels (2) besonders rasch und einfach nachprüfen kann: Im Gegensatz zur Drehkristallaufnahme wird ja hier nur ein Parameter (ψ) verändert.

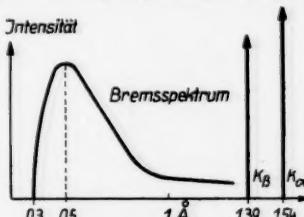


Abb. 9. Schematische Darstellung des Cu-Spektrums

Bei einem kubischen Gitter muß sich immer der vorliegende Typus ergeben. Bei einem rhombischen Gitter aber (rechteckige Elementarflächen) wird der relativ kräftige Ausschlag durch 220 bzw. 110 nicht genau zwischen den Ausschlägen durch 100, also bei 45° liegen, sondern eben nach jenem Winkel γ erscheinen, der durch die Gitterkonstanten bestimmt ist, $\gamma = \arctg \frac{c}{a}$ (Abb. 10).



Abb. 10.
a und c sind
die Gitterkon-
stanten eines
rhombischen
Gitters

$$\arctg \frac{c}{a} = \gamma$$

So kann sich also die CdS-Zelle als ein in vieler Hinsicht dem Film überlegenes Hilfsmittel bei der Kristallstrukturanalyse entwickeln, das schnell, sicher und bequem zu handhaben ist.

In noch stärkerem Maße aber gilt dies bei Experimenten auf dem Gebiet der Röntgenspektroskopie.

Apparatur als Kristallspektrograph, Aufnahme eines Spektrogramms

Abb. 11 entstand, indem zunächst der Reflex 600 zur K_α -Reflexion gebracht wurde und dann Kristall und Zelle im Verhältnis 1:2 langsam herumgedreht wurden, bis zum Primärstrahl. Dabei wurde wieder das gesamte Röntgenspektrum benutzt.

Die so erhaltene Aufnahme zeigt eine Menge beachtenswerter Einzelheiten und ist in vieler Hinsicht sehr interessant. (Wie alle anderen Messungen wurde sie mehrmals wiederholt und war gut reproduzierbar.)

Betrachten wir zunächst einmal die Braggsche Formel (2)

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{2a} \cdot \sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \quad (2)$$

im Falle der Ebene 200:

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{5,63}; \quad \lambda = \sin \vartheta \cdot 5,63.$$

Durch die Drehung im Verhältnis 1:2 erreichen wir, daß es immer dieselbe Ebene 200 ist, die aber mit zunehmendem Winkel eine immer größere Wellenlänge reflektiert. Mit fortschreitender Drehung kommt also nach und nach jede Wellenlänge einmal zur Reflexion und damit ist die Bezeichnung „Spektrogramm“ gerechtfertigt. Wir zerlegen die gesamte Strahlung spektral und messen die Intensitäten der einzelnen Wellenlängen. Zunächst Reflex K_α . Dann aber, dicht daneben, die ebenfalls relativ starke Linie K_β bei $14,3^\circ$ — das entspricht genau $\lambda = 1,389 \text{ \AA}$ ($= \sin 14,3^\circ \cdot 5,63$). Für kleinere Wellenlängen schließt sich dann langsam das Bremspektrum an, bis es bei $0,3 \text{ \AA}$ plötzlich abbricht:

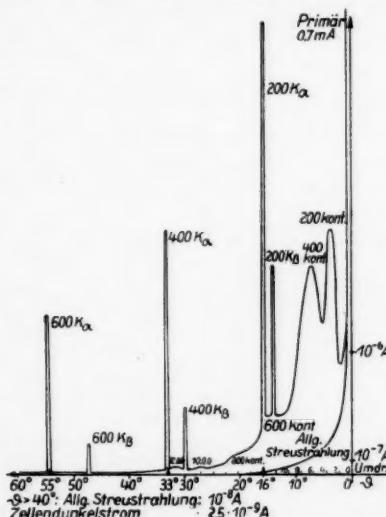


Abb. 11. Röntgenspektrogramm eines NaCl-Kristalls

finden wir bei $\psi = 16^\circ$ den sehr starken Nebenreflex K_β , die ebenfalls relativ starke Linie K_β bei $14,3^\circ$ — das entspricht genau $\lambda = 1,389 \text{ \AA}$ ($= \sin 14,3^\circ \cdot 5,63$). Für kleinere Wellenlängen schließt sich dann langsam das Bremspektrum an, bis es bei $0,3 \text{ \AA}$ plötzlich abbricht:

Dem entspricht ein Winkel von 3° , und in der Tat beobachten wir dort einen äußerst starken Abfall der Kurve.

Aber noch ist das aufgenommene Spektrogramm nicht durchsichtig geworden. Denn wenn wir die Ebenen 200 zur Reflexion bringen, so können wir es gar nicht verhindern, daß gleichzeitig für einen bestimmten Winkel ϑ dort auch alle die zu 200 parallelen Ebenen 400, 600, 800 usw. reflektieren, insofern die dafür aus (2) folgenden λ eben in dem Bereich liegen, wo überhaupt Strahlung vorhanden ist, mit anderen Worten zwischen 0,3 und 1,6 Å.

Wir haben also eine Überlagerung der sämtlichen spektralen Verteilungen für alle Ebenen 200, 400, 600, 800 usw. zu erwarten! D. h. nach (2) eine Erwartung von Maxima an folgenden Stellen:

Für die K -Linien wird bei $h \cdot 00$, $h > 6 \sin \vartheta < 1$. Betrachten wir nun das Spektrogramm, so finden wir die erwarteten Maxima an den vorgeschriebenen Stellen! Umgekehrt könnte man aus ihnen natürlich auch die Wellenlängen von K_α , K_β und das Maximum des Bremspektrums berechnen.

Die K -Linien sind wegen ihrer Intensität erheblich stärker als das Bremspektrum. Deutlich können sie mit dem μ -Ammeter gemessen werden. Von dem Maximum der Bremspektren ist 12.0 das letzte, das hier deutlich in Erscheinung tritt ($6 \cdot 10^{-8}$ Å), während die weiteren wegen der immer schwächeren Besetzung der Netzebenen bei steigendem Index nicht mehr deutlich hervortreten. Aus demselben Grunde werden sowohl die Maxima des kontinuierlichen Spektrums wie die scharfen K -Linien für die Ebenen 10–8–6–4–2.0 (fallender Index, zum Zentrum hin) immer größer. Dieser Zuwachs ist aber nicht so erheblich, wie ein anderer, der außerdem im gleichen Sinne zu diesem hinzukommt und nicht mit ihm zu verwechseln ist: Dem ganz allgemeinen Anstieg der Intensität für kleiner werdende ϑ wegen des Anstiegs von Atomformfaktor und Lorentzfaktor! Dieser nimmt gerade für ϑ kleiner 10° ganz erhebliche Ausmaße an, und dieser Tatbestand bringt uns in der Erklärung des Diagramms um einen großen Schritt weiter.

Bei 800 und 600 kont. ist der Anstieg so plötzlich, daß die Maxima nur als Ausbuchtungen der Kurve erscheinen. Wie kommt es dann aber, daß das nicht auch für 400 kont. gilt, d. h. zwischen 200 und 400 ein sogar sehr ausgeprägtes Minimum gemessen wurde? Das liegt daran, daß vor 400 nur noch ein einziges Minimum (220) liegt, und dessen abklingender Teil für größere λ ($> 0,5$) dieses Maximum nicht zudecken kann, während vor 600, 800 mehrere andere, erhebliche Maxima liegen, die ja alle mit ihren auslaufenden Teilen am Ort der Maxima 600, 800 noch kräftige Beiträge zur Intensität liefern. Dieser Umstand, daß sich die langsam abfallenden Seiten der Maxima alle überlagern, erklärt auch, daß 400 kont. etwas weiter rechts liegt als erwartet und größer ist, als man aus dem allgemeinen Ansteigen von 12–10–8–6–4–2.0 erwartet. Ist doch 400 nur wenig kleiner als 200, während die Differenz zu 600 dann erheblich ist. Aber wie gesagt, das ist selbst-

Tabelle 2

| Ebene | K_α | K_β | Max. d. Bremspektr. (0,5 Å) |
|--------|------------|-----------|-----------------------------|
| 200 | 16,0° | 14,2° | 5° |
| 400 | 33,2° | 29,7° | 10° |
| 600 | 54,9° | 48,0° | 16° |
| 800 | — | — | 21° |
| 10.0.0 | — | — | 27° |
| 12.0.0 | — | — | 33° |

verständlich, wenn man erstens die Superpositionen und zweitens den generellen Anstieg für kleine Winkel in Rechnung stellt.

Man kann es auch so ausdrücken: nur das erste Maximum des Bremspektrums 200 ist unverfälscht von Überlagerungen; daher erfolgt sein plötzliches Abbrechen bei etwa 3° (etwa $0,3 \text{ \AA}$) auch genau an der theoretisch erwarteten Stelle. Andererseits ist aber gerade bei ihm der verändernde Einfluß des Lorentz- und Atomfaktors besonders stark wegen des sehr kleinen Winkels, erreicht es doch die Größenordnung der K_α -Linien, während normalerweise die Laue-Reflexe (s. die Ausschläge etwa bei $30^\circ, 40^\circ$) rund $1/50$ bis $1/100$ der K_α -Linien betragen. (Wegen dieses allgemeinen sehr starken Anwachseins der Intensitäten zum Zentrum hin, liegt 200 kont. wohl auch, wie 400 kont. ein wenig zu weit rechts, während ja 600, 800 usw. mit den aus der Tabelle errechneten Werten genau übereinstimmen.)

Unabhängig von all diesen Betrachtungen ist noch zu beachten, daß stets auch eine allgemeine Streustrahlung in der Kamera vorhanden ist. Sie führt zu einem Ausschlag auch dann, wenn der Kristall gar nicht in Reflexionsstellung steht oder gar nicht vorhanden ist. Sie ist sehr gering für Winkel über 20° , kleiner als 10^{-8} A . (Schaltet man die Röntgenröhre auch noch ab, so bleibt dann nur noch der für den hier benutzten CdS-Kristall bei $10,5 \text{ V}$ fließende Dunkelstrom von $2 \cdot 10^{-9} \text{ A}$.) Die allgemeine Streustrahlung steigt aber bei kleinsten Winkeln rapide an, und wäre von den gemessenen Werten zu subtrahieren. So kommt etwa bei 2° noch einmal ein Minimum zustande, das aber bezüglich des eigentlichen Spektrogramms nur ein scheinbares ist und nach dieser Subtraktion nicht mehr existiert.

Für Winkel unter 1° geht die allgemeine Streustrahlung dann schließlich in den Primärstrahl (10^{-3} A) über.

Damit ist das Spektrogramm wohl hinreichend erklärt. Es zeigt die vielfache Anwendbarkeit der CdS-Zelle allein bei dieser Aufgabe, die Intensitätsmessungen innerhalb von 5 Zehnerpotenzen erfordert.

Ahnliche Spektrogramme könnte man nun für 220, 440, ... und 420, ... sowie 620, ... aufnehmen. Ihre Summe schließlich ergibt das komplette Drehkristalldiagramm, mit dem Vorteil gegenüber dem photographischen, daß wir genaue Kenntnis der Anteile der einzelnen Netzebenensysteme haben, die an jeder Einzelstelle zur Intensität beitragen.

Debye-Scherrer-Aufnahme eines Cu-Drahtes

Bei Debye-Scherrer-Aufnahmen treten Schwierigkeiten auf, scharfe und ganz gleichmäßig geschwärzte Ringe zu erhalten. Bei Filmaufnahmen, die wegen etwas zu großen Kristalliten körnige Ringe zeigen, hilft man sich bekanntlich durch langsames Drehen des Präparats um seine senkrechte Achse. Die meisten Debye-Scherrer-Aufnahmen werden so hergestellt. Da wir aber mit der CdS-Zelle nicht Quantitäten, sondern Intensitäten messen, besteht der Ausweg des gedrehten Präparats nicht, sondern das Streuzentrum muß von vornherein die für gleichmäßige Ringe erforderliche Kristallitengröße haben.

Ein normaler Cu- oder Ag-Draht liefert körnige Ringe. Auch Glühen und Abschrecken ergibt nicht immer befriedigende Resultate. Sie wurden erst nach einigen Versuchen durch ganz leichtes vorsichtiges Hämmern

des Drahtes erzielt. Hierdurch entstehen im Gefüge offenbar die erforderlichen Kristallitgrößen. Der Versuchsdraht hatte 0,6 mm Durchmesser.

Wieder vergleichen wir die Zellenmessungen (Abb. 12a) mit dem photometrierten Film (Abb. 12b) und finden eine recht gute Übereinstimmung (Tab. 2). Auch die Tatsache, daß (wegen des Zusammenwirks von K_{α_1} und K_{α_2}) die ganz außen liegenden Ringe 313 und 420 breiter als die übrigen sind, kommt beide Male gut zum Ausdruck.

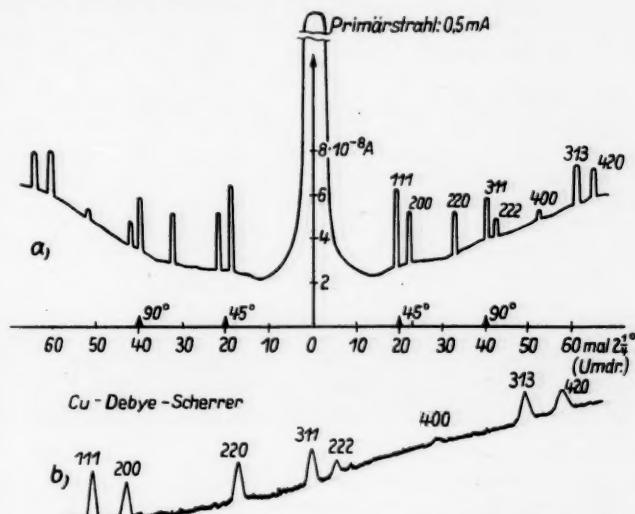


Abb. 12. Debye-Scherrer-Aufnahme eines Kupferdrahtes. 40 kV, 8 mA, Cu-K α -homogene Strahlung (Ni-Filter), 10,5 V Saugspannung, Zelle 7/IX (54), Röhrenmeßverstärker. Cu-Draht 0,6 mm Ø ruhend. Oben CdS-Zelle 12a, unten Film 12b

Tabelle 3

| $h \ k \ l$ | $h^2 + k^2 + l^2$ | $\sin \theta$ | θ | Umdr. | CdS-Zelle rechts links $\cdot 10^{-8} \text{ A}$ | Film Photometer Ausschläge in cm (links) |
|-------------|-------------------|---------------|----------|-------|--|--|
| 1 1 1 | 3 | 0,368 | 21,6° | 19 | 3,5 | 3,9 |
| 2 0 0 | 4 | 0,427 | 25,3° | 22,5 | 2,3 | 2,6 |
| 2 2 0 | 8 | 0,605 | 37,2° | 33 | 1,9 | 2,2 |
| 3 1 1 | 11 | 0,709 | 45,1° | 40 | 1,8 | 2,3 |
| 2 2 2 | 12 | 0,740 | 47,8° | 42,5 | 0,8 | 1,0 |
| 4 0 0 | 16 | 0,854 | 58,6° | 52 | 0,4 | 0,5 |
| 3 1 3 | 19 | 0,930 | 68,5° | 61 | 1,8 | 1,9 |
| 4 2 0 | 20 | 0,955 | 72,8° | 64,5 | 1,3 | 1,6 |

$$a = 3,608 \text{ Å}$$

Die technische Durchführung ist hier besonders einfach, da man φ überhaupt nicht zu verändern braucht, sondern nur die Zelle (φ) langsam herum-schwenkt und die Intensitäten abliest.

Reflexe mit gemischten Indizes gibt es wiederum nicht (flächenzentriert kubisches Gitter!), aber im Gegensatz zu NaCl sind hier die geraden und ungeraden von gleicher Größenordnung (nur eine Atomsorte).

Wie bereits erwähnt, können mit der CdS-Zelle nur Röntgeninterferenzen gemessen werden, die einen Photostrom auslösen, der wesentlich größer als der Dunkelstrom der Zelle ist. Die von uns untersuchten Kristalle lieferten größere Interferenzströme, da die Kristalle relativ groß waren. Will man aber noch kleinere Kristalle benutzen und noch schwächere Interferenzen ausmessen, so ist es notwendig, mit einem Röntgenwechselstrom zu arbeiten, der dann einen Zellenwechselstrom ergibt, der sich dem Dunkelgleichstrom überlagert.

Der Wechselstrom kann dann leicht beliebig verstärkt werden. Einen Röntgenwechselstrom kann man erzeugen entweder durch einen rotierenden Bleisektor, der vor der Kamerablende angeordnet wird, oder durch einen pulsierenden Röntgenstrahl, der durch Steuerung des Elektronenstroms der Glühkathode mit Hilfe des Wehnelt-Zylinders erzeugt werden kann.

Daher wurde zunächst geprüft, ob eine erregte CdS-Zelle, an die als Saugspannung eine Wechselspannung angelegt wurde, für die in Frage kommenden Versuche trägefrei arbeitet. Das Resultat zeigt Abb. 13, 14 und 15.



Abb. 13

Abb. 14

Abb. 15

Abb. 13--15. Leitfähigkeitsstrom einer CdS-Zelle bei angelegter Wechselspannung als Saugspannung. Abb. 13, Frequenz der Saugspannung, 2,5 kHz. Abb. 14, 5 kHz. Abb. 15, 80 kHz. (Die Zeitabzissen sind untereinander verschieden)



Abb. 16

Abb. 17

Abb. 18

Abb. 16. Bestrahlung der Zelle mit 50. periodischem Röntgenwechsellicht Saugspannung 10,5 Volt

Abb. 17. Röntgenimpuls von 10^{-3} sec ohne Vorerregung der CdS-Zelle mit sichtbarem Licht

Abb. 18. Dasselbe wie Abb. 17. CdS-Zelle mit sehr schwacher Lichtintensität vorerregt

In der Abb. 13 betrug die Frequenz 2,5 kHz und ergab bei dem eingestellten Verstärkungsgrad in willkürlichen Einheiten eine Amplitude von 40 Skalenteilen, in Abb. 14 bei 5 kHz eine Amplitude von 39,5 Skalenteilen und Abb. 15 bei 80 kHz eine Amplitude von 39,5 Skalenteilen. Hieraus ergibt sich, daß die Zelle bis zu dieser hohen Frequenz trägefrei arbeitet.

In einem zweiten Versuche wurde der Ausgleichskondensator für die Röntgenröhrehochspannung ausgeschaltet, so daß die Röntgenröhre praktisch

tisch als Gleichrichter arbeitete. Abb. 16 zeigt das aufgenommene Oszillogramm des Zellenstroms.

Der eine von uns⁵⁾ hatte darüber hinaus eingehende Untersuchungen über einen Verstärkereffekt durch Vorbestrahlungen mit sichtbarem Licht durchgeführt. Abb. 17 u. 18 geben die Resultate wieder. Das von der Röntgenröhre kommende Strahlenbündel wurde mit Hilfe einer rotierenden Bleischeibe, die einen Schlitz hatte, unterbrochen, so daß nur ganz kurze Impulse (etwa 10^{-3} sec) auf die Zelle auftreffen. Abb. 17 zeigt den Stromimpuls ohne Vorbelichtung, Abb. 18 den gleichen Impuls mit gleichzeitiger Belichtung mit weißem Licht. Eine derartige Verstärkung und Vorbelichtung läßt sich nur bei sehr kleinen CdS-Zellen-Strömen durchführen, die in der Größenordnung von 10^{-10} bis 10^{-9} A liegen. Die Vorbelichtung soll nur einen Strom auslösen, der der Größe des Dunkelstromes entspricht. Dann können 40- bis 20fache Verstärkungen der Ströme erzielt werden.

Sobald die Kamera synchron mit einem Schreibgerät gekoppelt wird, welches den Zellenstrom registriert, können solche Aufnahmen in sehr kurzer Zeit durchgeführt werden. Zur Justage des Kristalls sollte man zweckmäßigerverweise einen kleinen Röntgenbildwandler verwenden. Bei den normalen Drehkristallaufnahmen ist dann folgendes zu beachten: Alle parallelen Netzebenensysteme, z. B. 200, 400, 600 sowie 220, 440, kann man mit einem Arbeitsgang erfassen, indem man etwa die erste Netzebene 200 zur Reflexion bringt und nun die Zelle (φ) und den Kristall (ψ) im Verhältnis 2:1 dreht, wofür die Kamera eingerichtet ist. Denn bei einer Drehung des reflektierenden Kristalls um einen bestimmten Winkel muß sich der Winkel des reflektierten Strahls φ um den doppelten Betrag vergrößern. Wenn dann sin ϑ den sich aus Gl. (2) ergebenden Wert für die nächste Netzebenenschar 400 erreicht hat, registriert die Apparatur von selbst den nächsten Ausschlag usw. Für jedes neue, zu diesem nicht parallele Netzebenensystem (z. B. 600) müssen φ und ψ selbstverständlich neu eingestellt werden.

Die vorliegende Arbeit wurde im Institut für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften in Berlin-Buch ausgeführt. Für das stete Interesse und die weitgehende Förderung der Arbeit sind wir Herrn Prof. Dr. Möglich zu großem Dank verpflichtet.

⁴⁾ H. Simon, Vortrag auf der Physikertagung in Innsbruck 1953.

Berlin-Buch, Institut für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 18. März 1957.

Über die Kompatibilität der Feldgleichungen, Erhaltungssätze und Bewegungsgleichungen in der unitären Feldtheorie

Von Jaroslav Pachner

Inhaltsübersicht

In der Einleitung wird die Frage der Wahl des Hamiltonians für die unitäre Feldtheorie der Schwere und Elektrizität ausführlich diskutiert. Dann wird die Kompatibilität der Feldgleichungen nachgewiesen: Es bestehen 18 Gleichungen für 16 unbekannten Komponenten des nichtsymmetrischen Fundamentalensors $g_{\mu\nu}$, von welchen 4 + 1 + 1 Identitäten abzurechnen sind, so daß nur 12 Gleichungen unabhängig bleiben, was genau dem Einsteinschen Postulat der allgemeinen Kovarianz der Feldgleichungen entspricht. Vom physikalischen Standpunkt sprechen die 4 Identitäten den Erhaltungssatz für Impuls und Energie, weitere 1 Identität den Erhaltungssatz für die elektrische Stromdichte und die letzte 1 Identität den Erhaltungssatz für die magnetische Stromdichte aus. Die Bewegungsgleichungen eines Probeteilchens werden aus dem Variationsprinzip der stationären Teilchenwirkung abgeleitet und für den Fall der Newton-Maxwellschen Annäherung und für den Fall der Bewegung eines Probeteilchens im statischen kugelsymmetrischen Feld explizite angegeben.

Einleitung

Die allgemeine Relativitätstheorie¹⁾ erklärt die Gravitationswirkungen als Folge der Krümmung des Raum-Zeit-Kontinuums. Nach dieser erfolgreichen Entdeckung fehlte es nicht an Versuchen, den fruchtbaren Gedanken Einsteins auch auf das elektromagnetische Feld auszudehnen. Nach manchen vergeblichen Bemühungen ist es wieder Einstein in Zusammenarbeit mit Straus²⁾³⁾ gelungen, einen bedeutenden Fortschritt zur Lösung der Frage der unitären Feldtheorie zu machen. Fast in derselben Zeit hat Schrödinger⁴⁾⁵⁾ seine rein affine Feldtheorie aufgebaut, die sich von der Einsteinschen dadurch unterscheidet, daß ihre Feldgleichungen das kosmologische

¹⁾ A. Einstein, Ann. Physik **49**, 769 (1916).

²⁾ A. Einstein, Ann. Math. **46**, 578 (1945); A. Einstein, E. G. Straus, Ann. Math. **47**, 731 (1946); A. Einstein, Rev. Mod. Physics **20**, 35 (1948).

³⁾ A. Einstein, The Meaning of Relativity, 4. Aufl., Princeton 1953, Appendix II und Supplement to Appendix II.

⁴⁾ E. Schrödinger, Proc. Roy. I. A., **A 49**, 43 (1943), 237, 275 (1944); Nature **153**, 572 (1944); Proc. Roy. I. A., **A 51**, 44 (1946), 163 (1947), 205 (1948); **A 52**, 1 (1948).

⁵⁾ E. Schrödinger, Space-Time Structure, Cambridge 1950, S. 112.

Glied enthalten. Beide Versionen, die Einsteinsche und die Schrödinger-sche, haben aber nicht das ganze Problem der unitären Theorie gelöst.

Schon im Jahre 1940 entstand die Arbeit von Rosen⁶⁾, die einen Versuch darstellt, die allgemeine Relativitätstheorie als eine Gravitationstheorie in ebener Raum-Zeit zu interpretieren. Diese Idee verfolgte auch Papapetrou⁷⁾ und andere Physiker⁸⁾.

Die Frage, ob die Raum-Zeit gekrümmmt oder eben ist, scheint nicht endgültig beantwortet zu sein. Es wird aber eine wichtige Stütze zugunsten der Geometrisierung der Physik, wenn es gelingen wird, eine widerspruchsfreie unitäre Feldtheorie der Schwere und Elektrizität zu entwickeln.

Da die unitäre Theorie aus einem Variationsprinzip abgeleitet wird, so besteht die grundlegende Frage nach der richtigen Form des Hamiltonians. Wie Einstein gezeigt hat⁹⁾, kann der Hamiltonian mit dem Ausdruck

$$\mathfrak{H} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^* + \mathfrak{K} \quad (\text{A})$$

beschrieben werden. Wenn die von Einstein abgeleitete Beziehung zwischen der affinen Konnektion $\Gamma_{\mu\nu}^*$ und dem nichtsymmetrischen Fundamental-tensor $g_{\mu\nu}$, die auch in der Schrödingerschen Version der unitären Theorie ungeändert gilt, nicht verletzt werden soll, darf die skalare Dichte \mathfrak{K} die Konnektion $\Gamma_{\mu\nu}^*$ nicht enthalten und muß deshalb nur aus $g_{\mu\nu}$ gebildet werden. Einstein bemerkt an dieser Stelle⁹⁾, daß das additive Glied \mathfrak{K} eine Heterogenität in das System von Gleichungen hineinbringt und seine Einführung mit schwerwiegenden physikalischen Gründen gerechtfertigt werden muß.

Das additive Glied erschien bei den kosmologischen Betrachtungen schon in der allgemeinen Relativitätstheorie¹⁰⁾. Der Hamiltonian kann hier in der Form

$$\mathfrak{H} = g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \lambda g_{\mu\nu} \right) \quad (\text{B})$$

geschrieben werden. Nach der bahnbrechenden Arbeit von Friedman¹¹⁾ hat Einstein das kosmologische Glied entlassen, um die logische Einfachheit der Theorie wieder herzustellen¹²⁾. Legen wir aber die in der Arbeit I ausgesprochene Hypothese¹³⁾ zugrunde, daß es sinnlos ist, von einem Feld in den Gebieten zu sprechen, wo sich die Elementarteilchen mit nichtverschwindender Ruhmasse befinden, da dieses Feld jeder experimenteller Überprüfung unzugänglich ist, so müssen wir auch bei den kosmologischen Betrachtungen in der allgemeinen Relativitätstheorie nur von den Feldgleichungen ausgehen, in denen der Energie-Impuls-Tensor der Materie gleich Null gesetzt ist. Aus den Feldgleichungen ohne das kosmologische Glied folgt aber nur das pseudo-

⁶⁾ N. Rosen, Physic. Rev. **57**, 147 (1940).

⁷⁾ A. Papapetrou, Proc. Roy. I. A., A **52**, 11 (1948).

⁸⁾ M. Kohler, Z. Physik **181**, 571 (1952); **184**, 286, 306 (1953); A. Papapetrou, A. Urich, Ann. Physik **14**, 220 (1954); A. Papapetrou, Math. Nachr. **12**, 129, 143 (1954); Z. Physik **189**, 518 (1954).

⁹⁾ Siehe Fußnote 3, S. 146.

¹⁰⁾ A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. **142**, (1917).

¹¹⁾ A. Friedman, Z. Physik **10**, 377 (1922).

¹²⁾ Siehe Fußnote 3, S. 111.

¹³⁾ J. Pachner, Ann. Physik **19**, 353 (1957). Gleichungen aus dieser Arbeit werden hier als (I ...) bezeichnet.

euklidische Weltall, während mit Berücksichtigung dieses Gliedes entweder die statische de Sittersche oder die expandierende zylindrische Welt sich ergibt, deren Anfangskrümmungsradius gleich dem de Sitterschen ist. Wollen wir daher nicht alle kosmologischen Betrachtungen grundsätzlich ausschließen, müssen wir unter Annahme der Gültigkeit der oben angeführten Hypothesen die von Einstein verlangte Homogenität des Hamiltonians schon in der allgemeinen Relativitätstheorie verletzen.

Die bisher ausführlichste mathematische Bearbeitung der Einsteinschen auf homogenem Hamiltonian aufgebauten unitären Theorie findet man in den Arbeiten von Hlavatý¹⁴⁾. Die Ausdrücke für das Maxwell'sche Feld, die er mit außerordentlicher mathematischer Kunst abgeleitet hat, sind aber allzu kompliziert. Gegen die Einsteinsche Version der unitären Theorie spricht auch die von Infeld¹⁵⁾ und Callaway¹⁶⁾ nachgewiesene Tatsache, daß in dieser Version die richtigen Bewegungsgleichungen nicht aus den Feldgleichungen folgen. Es ist daher zweckmäßig, den Versuch zu machen, eine neue Form der unitären Feldtheorie aus einem heterogenen Hamiltonian abzuleiten, deren Feldgleichungen und die physikalische Interpretation der geometrischen Felder bedeutend einfacher als in den Arbeiten von Hlavatý wären und die aus dieser Theorie sich ergebenden Beziehungen die von der allgemeinen Relativitätstheorie vorhergesagte Form hätten.

Nimmt man den Hamiltonian (B) aus der allgemeinen Relativitäts-theorie in die unitäre Theorie ungeändert über, so erhält man die von Schrödinger¹⁴⁾¹⁶⁾ auf rein affinem Weg abgeleiteten Feldgleichungen. Wie der Verfasser in der Arbeit I gezeigt hat, sie geben in der linearen Annäherung die Newtonsche und Maxwellsche Theorie, sie versagen aber vollständig bei der exakten Lösung¹³⁾¹⁷⁾.

Um die richtige Form der Bewegungsgleichungen zu erhalten, ist Bonnor¹⁸⁾ aus dem Hamiltonian

$$\tilde{H} = g^{\mu\nu} (R_{\mu\nu}^* + p^2 \underline{g}_{\mu\nu}) \quad (C)$$

ausgegangen, in dem p eine reale oder imaginäre Konstante bezeichnet. Er diskutiert die Feldgleichungen und Bewegungsgleichungen seiner Theorie nur in der linearen Annäherung, die aber zur endgültigen Beurteilung nicht entscheidend ist, denn auch die bei exakter Lösung versagende Schrödinger'sche Theorie führt in linearisierter Form zu richtigen Resultaten. Mit der Identifizierung der Felder, wie Bonnor sie durchgeführt hat, kann man nicht einverstanden sein: Die lineare Annäherung erlaubt nämlich gewisse Freiheit bei der physikalischen Interpretation der geometrischen Felder, die erst die exakte Lösung beseitigt.

Der Verfasser hat in der Arbeit I eine neue Form der unitären Theorie als Anwendungsbeispiel zu seinem allgemeinen Variationsprinzip entwickelt. Er ist dabei vom Hamiltonian

$$\tilde{H} = g^{\mu\nu} \left[R_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2} \lambda \underline{g}_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{2} \lambda + \alpha \right) \underline{g}_{\mu\nu} \right] \quad (D)$$

¹⁴⁾ V. Hlavatý, J. Rat. Mech. Anal. **1**, 539 (1952); **2**, 1 (1953); **3**, 103, 147, 645 (1954); **4**, 247, 653 (1955); **5**, 419 (1956).

¹⁵⁾ L. Infeld, Acta Phys. Polon. **10**, 284 (1950).

¹⁶⁾ J. Callaway, Physic. Rev. **92**, 1567 (1953).

¹⁷⁾ A. Papapetrou, Proc. Roy. I. A., A **52**, 69 (1948).

¹⁸⁾ W. B. Bonnor, Proc. Roy. Soc. (London) **A** **226**, 366 (1954).

ausgegangen. Dieser ist eine natürliche Generalisierung des von kosmologischen Betrachtungen in der allgemeinen Relativitätstheorie verlangten Hamiltonians (B) und enthält als Spezialfälle die Schrödingersche ($\alpha = 0$) und die Bonnorsche ($\lambda = 0$) Theorie. Die Hamiltoniane (C) und (D) haben die einfachste Form und stehen, wenn man die von Bonnor vorgeschlagene Identifizierung der Felder verläßt und die aus der Arbeit I übernimmt, in demselben Verhältnis gegeneinander, das in der allgemeinen Relativitätstheorie zwischen den Gleichungen ohne bzw. mit dem kosmologischen Glied besteht. Der Hamiltonian (D) scheint aber besser physikalisch begründet zu sein, da er eine natürliche Generalisierung von (B) darstellt und daneben mit den kosmologischen Betrachtungen unterstützt ist. Vergleichen wir das letzte Glied in (C) und (D) mit dem Ausdruck für die elektromagnetische Wirkung in der allgemeinen Relativitätstheorie¹⁹⁾, so stellen wir fest, daß die beiden Ausdrücke übereinstimmend aufgebaut sind, wenn wir die Komponenten $g_{\mu\nu}$ mit dem elektromagnetischen Feld identifizieren. Infolgedessen hat die strenge statische kugelsymmetrische Lösung der aus dem Hamiltonian (D) abgeleiteten Feldgleichungen¹³⁾ die von der allgemeinen Relativitätstheorie geforderte Form, was keine andere unitäre Theorie bisher erreichen konnte.

In der vorliegenden Arbeit werden wir zuerst die Kompatibilität der in der Arbeit I gefundenen Feldgleichungen nachweisen. Wir zeigen dabei, daß die fundamentale Größe der vorliegenden unitären Theorie der nichtsymmetrische Tensor $g_{\mu\nu}$ ist, von dem die affine Konnektion $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ und das Vektorfeld Γ_{μ}^{α} abgeleitet werden. Der symmetrische Teil von $g_{\mu\nu}$ entspricht den Gravitationspotentialen, der schiefsymmetrische dem (H, D) elektromagnetischen Tensorfeld und das Vektorfeld dem vierdimensionalen Vektorpotential der Maxwell'schen Theorie. Die paradoxe Tatsache, daß die $g_{\mu\nu}$ den Gravitationspotentialen und die $g_{\mu\nu}$ den Feldintensitäten proportional sind, wird, wie Bonnor¹⁸⁾ gezeigt hat, ganz begreiflich, wenn man bedenkt, daß in den Bewegungsgleichungen die $g_{\mu\nu}$ und die ersten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ in den verallgemeinerten Kraftkomponenten hervortreten.

Nachdem wir in der vorliegenden Arbeit die Kompatibilität der Feldgleichungen nachgewiesen haben werden, erörtern wir die Erhaltungssätze der neuen unitären Theorie und leiten schließlich die Bewegungsgleichungen eines Probeteilchens ab.

Über die Kompatibilität der Feldgleichungen

Die Definitionsgleichungen. Die Tensordichte $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ und der Tensor $T_{\mu\nu}$ sind mit der Gl. (I.31) definiert:

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \sqrt{-g} = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - 2\alpha F_{\mu\nu} + \alpha F g_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}, \quad (1)$$

wobei

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}, \quad (2)$$

$$F = F_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}, \quad (3)$$

¹⁹⁾ A. S. Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung. Berlin 1925, S. 282.

$$G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} - \alpha \left(g_{\mu\nu} - g_{\mu\beta} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right), \quad (4)$$

denn

$$g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}) = -g^{\alpha\beta} g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} \delta g^{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}.$$

Multiplizieren wir den Tensor $T_{\mu\nu}$ mit $g^{\mu\nu}$ und verjüngen, erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, daß der Tensor $T_{\mu\nu}$ infolge der Feldgleichungen verschwindet, die Beziehung

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \sqrt{-g} = (R_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} - 2\alpha F_{\mu\nu}) \sqrt{-g}, \quad (1a)$$

wo

$$H_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = -\lambda g_{\mu\nu} + \alpha \left(g^{\alpha\beta} g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \right). \quad (5)$$

Die kontravariante Vektordichte \mathfrak{G}^μ ist mit der Gleichung

$$\mathfrak{G}^\mu = g^{\mu\nu} \mathfrak{g}_{\nu}, \quad (6)$$

definiert.

Der schiefsymmetrische Tensor $F_{\mu\nu}$ ist mit der Gl. (I.3)

$$F_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu,\mu} - \Gamma_{\mu,\nu} \quad (7)$$

definiert. Durch zyklische Divergenz von $F_{\mu\nu}$ entsteht der vollständig schiefsymmetrische kovariante Tensor dritter Stufe $F_{\mu\nu\rho}$:

$$F_{\mu\nu\rho} = F_{[\mu\nu,\rho]} \equiv F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu,\rho,\mu} + F_{\rho,\mu,\nu}. \quad (8)$$

Das Verschwinden von $F_{\mu\nu\rho}$ ist die Integrabilitätsbedingung für das Gleichungssystem (7).

Aus dem Tensor $F_{\mu\nu\rho}$ bilden wir schließlich die Vektordichte \mathfrak{M}^σ :

$$\mathfrak{M}^\sigma = \frac{1}{6} F_{\mu\nu\rho} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (9)$$

wobei $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ die kontravariante vollständig schiefsymmetrische Tensordichte mit den Komponenten $\pm 1, 0$, ist.

Die Feldgleichungen. Die Gl. (I.37), (I.39), (I.38a, b) sind die eigentlichen Feldgleichungen:

$$g_{\mu\nu,\epsilon} - \Gamma_{\nu,\epsilon}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\epsilon,\nu}^\alpha g_{\mu\alpha} = 0, \quad (10)$$

$$g^{\mu\nu}_{\nu,\nu} = 0, \quad (11)$$

$$R_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} = 0, \quad (12)$$

$$R_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} = 2\alpha F_{\mu\nu}. \quad (13)$$

Da das Tensorfeld $F_{\mu\nu}$ durch die Rotation eines Vektorfeldes entstehen soll, so verlangt die Integrabilität des Gleichungssystems (7) das Verschwinden von $F_{\mu\nu\rho}$. Es folgt daher aus Gl. (13)

$$R_{[\mu\nu,\rho]} + H_{[\mu\nu,\rho]} = 0, \quad (14)$$

wo $R_{[\mu\nu,\rho]}$ und $H_{[\mu\nu,\rho]}$ die zyklische Divergenz von $R_{\mu\nu}$, bzw. $H_{\mu\nu}$ bezeichnen, die ebenso definiert ist, wie in der Gl. (8).

Die Identitäten. Die ersten vier Identitäten (I.20) wurden nach der bekannten Weylschen Methode abgeleitet:

$$\frac{1}{2} (\mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\epsilon} + \mathfrak{T}_{\epsilon\mu} g^{\epsilon\mu})_{,\nu} + \frac{1}{2} \mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{,\epsilon} = 0. \quad (15)$$

In der vorliegenden Theorie bestehen noch weitere zwei Identitäten, die dieselbe Form haben, wie in der Einsteinschen Theorie²⁰⁾:

$$\mathfrak{I}^{\mu}_{\nu,\mu} = 0, \quad (16)$$

$$\mathfrak{M}^{\sigma}_{\nu,\sigma} = 0. \quad (17)$$

Mit Hilfe der Substitution (6) geht die Identität (16) in die Form der Gl. (I.21) über. Sie spricht die triviale Behauptung aus, daß die zweite partielle Ableitung von $g^{\mu\nu}$ verschwindet

$$g^{\mu\nu}_{\nu,\nu,\mu} = 0, \quad (16a)$$

was jede schiefsymmetrische Tensordichte zweiter Stufe erfüllt, denn es liegt nicht an der Reihe von partiellen Ableitungen.

Die Identität (17), in der die kontravariante Tensordichte \mathfrak{M}^{σ} mit Gl. (9) und (8) definiert ist, wird mit jedem schiefsymmetrischen Tensor $F_{\mu\nu}$, erfüllt²⁰⁾.

Die Kompatibilität der Feldgleichungen. Hlavatý und Sáenz²¹⁾ haben nachgewiesen, daß das System (10) von 64 algebraischen Gleichungen für die Unbekannten $I^{\sigma}_{\mu\nu}$, eine eindeutige Lösung hat, wenn

$$\det g_{\mu\nu} \neq 0, \quad \det g_{\mu\nu} \neq 0 \quad \text{für} \quad \det g_{\mu\nu} \neq 0, \quad (18a)$$

oder

$$\det g_{\mu\nu} \neq 0, \quad (\det g_{\mu\nu} - 2 \det g_{\mu\nu}) \det g_{\mu\nu} \neq 0 \quad \text{für} \quad \det g_{\mu\nu} = 0. \quad (18b)$$

Nehmen wir an, daß diese Bedingungen erfüllt sind, und setzen wir die so gefundenen Werte von $I^{\sigma}_{\mu\nu}$, in den verjüngten Riemann-Christoffelschen Tensor $R_{\mu\nu}$, können wir 4 Gleichungen (11), 10 Gleichungen (12) und 4 Gleichungen (14), also insgesamt 18 Gleichungen, als die Feldgleichungen für 16 Komponenten des Fundamentaltensors $g_{\mu\nu}$ ansehen. Da unter diesen 18 Gleichungen 4 Identitäten (15), 1 Identität (16) und 1 Identität (17), also insgesamt 6 Identitäten bestehen, bleiben nur 12 Gleichungen unabhängig, d. h. um 4 Gleichungen weniger, als die Anzahl der unbekannten Funktionen ist, was genau dem Einsteinschen Postulat der allgemeinen Kovarianz der Feldgleichungen entspricht.

Nachdem die Funktionen $g_{\mu\nu}$ bestimmt sind, berechnen wir nach Gl. (13) das Tensorfeld $F_{\mu\nu}$, und durch Integration der Gl. (7) das Vektorfeld $I_{\mu\nu}$.

Die Identifizierung der Felder. Nach den Resultaten der Arbeit I identifizieren wir die $g_{\mu\nu}$ mit den Gravitationspotentialen und die $g_{\mu\nu}$ bzw. $g^{\mu\nu}$ mit dem elektromagnetischen Feld (H, D).

Die Metrik des Zeit-Raum-Kontinuums bestimmen die $g_{\mu\nu}$.

Der erste Quadrupel der Maxwellschen Gleichungen sind Gl. (11). Im Gegensatz zu der in der Arbeit I ausgesprochenen Behauptung sehen wir die Gleichungen

$$F_{\mu\nu\rho} = 0, \quad (19)$$

die aus Gl. (13) und (14) folgen, als den zweiten Quadrupel der Maxwell-schen Gleichungen an. Es gelten daher alle Maxwellschen Gleichungen ungeändert auch in der vorliegenden unitären Theorie, wir müssen aber das

²⁰⁾ Siehe Fußnote 3, S. 142, 147, 155.

²¹⁾ V. Hlavatý, A. W. Sáenz, J. Tat. Mech. Anal. 2, 523 (1953).

elektromagnetische Feld (B, E) mit dem Tensor $F_{\mu\nu}$, identifizieren, woraus weiter und mit Rücksicht auf Gl. (7) die Identifikation von Γ_μ mit dem Vektorpotential der Maxwellschen Theorie folgt.

Zwischen den Feldern $F_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ besteht die Beziehung (13), die allerdings nicht so einfach ist, wie die Beziehung zwischen den Feldern (B, E) und (H, D) in der Maxwellschen Theorie, denn sie enthält noch weitere Glieder als kleine Korrekturen, die in schwachen Feldern verschwinden. Wir befinden uns hier also in ähnlicher Situation, der man schon in der nichtlinearen Theorie des elektromagnetischen Feldes von Born²²⁾ begegnet ist, wo die einfache Proportionalität zwischen den Feldern (B, E) und (H, D) auch mit einer mehr verwickelten Formel ersetzt ist.

Die Randbedingungen für die Feldgleichungen. Alle vorangehenden Gleichungen folgen aus dem bekannten Variationsprinzip der stationären Wirkung und gelten in leerer Raum-Zeit. Sie sind aber partielle Differentialgleichungen, und wie Fock²³⁾ unterstrich, für diese ist die Angabe der Randbedingungen ebenso wichtig, wie die der Feldgleichungen selbst.

Aus den in der Arbeit I ausführlich auseinandergesetzten Gründen hat deshalb der Verfasser das Variationsprinzip so modifiziert, daß aus ihm noch folgende zwei Gleichungen sich ergeben, die die Integrationskonstanten der geometrischen Felder in leerer Raum-Zeit aus den physikalischen Parametern der Teilchen bestimmen und so die Geometrie mit der Physik verbinden. Falls die Teilchen kugelsymmetrisch sind („Massenpunkte“ der Newtonschen Mechanik), schreiben wir sie in der Form (I.40), (I.41)

$$\frac{1}{8\pi} \int_{S^{(k)}} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\epsilon}{\partial m^{(k)}} - g^{\mu\epsilon} \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha}{\partial m^{(k)}} \right) \delta m^{(k)} n_\epsilon dS = \delta_{m_0^{(k)}} W_2^{(k)} \quad (20)$$

$$-\frac{2\pi a}{4\pi} \int_{S^{(k)}} g^{\mu\nu} \delta A_\mu n_\nu dS = \delta_{A_\mu} W_2^{(k)} \quad (21)$$

mit

$$\Gamma_\mu = a A_\mu, \quad (22)$$

wobei A_μ das Vektorpotential der Maxwellschen Theorie und a einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet.

Die Erhaltungssätze

Der Erhaltungssatz für Impuls und Energie

Mathematische Diskussion. Bei der Diskussion der vier Identitäten (15) spalten wir zuerst die Tensordichte $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ und den Tensor $g^{\mu\nu}$ in den symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil:

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = \mathfrak{T}_{\mu\nu} + \mathfrak{T}_{\mu\nu},$$

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu},$$

wobei

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = \mathfrak{T}_{\nu\mu}, \quad \mathfrak{T}_{\mu\nu} = -\mathfrak{T}_{\nu\mu},$$

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}, \quad g^{\mu\nu} = -g^{\nu\mu}.$$

²²⁾ M. Born, Proc. Roy. Soc. (London) **A 143**, 410 (1943); M. Born, L. Infeld, Proc. Roy. Soc. (London) **A 144**, 425 (1934).

²³⁾ V. A. Fock, Teorija prostranstva, vremeni i tijagoteniya, Moskva 1955, S. 11.

Nach kurzer Rechnung haben wir dann

$$\frac{1}{2} (\mathfrak{T}_{\mu\varepsilon} g^{\mu\nu} + \mathfrak{T}_{\varepsilon\mu} g^{\nu\mu}),_{\nu} = (\mathfrak{T}_{\mu\varepsilon} g^{\mu\nu} + \mathfrak{T}_{\varepsilon\mu} g^{\nu\mu}),_{\nu}. \quad (23)$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$g^{\mu\nu},_{\varepsilon} = -I_{\alpha\varepsilon}^{\mu} g^{\alpha\nu} - I_{\varepsilon\alpha}^{\nu} g^{\mu\alpha},$$

die aus Gl. (10) folgt²⁴⁾, finden wir

$$\frac{1}{2} \mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\mu\nu},_{\varepsilon} = -\frac{1}{2} (\mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} I_{\alpha\varepsilon}^{\mu} + \mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} I_{\varepsilon\alpha}^{\nu}).$$

Auf der rechten Seite spalten wir nun wieder $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ und $g^{\alpha\beta}$ in den symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil und erhalten

$$\frac{1}{2} \mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\mu\nu},_{\varepsilon} = -(\mathfrak{T}_{\mu\varepsilon} g^{\alpha\nu} + \mathfrak{T}_{\varepsilon\mu} g^{\mu\alpha}) I_{\alpha\varepsilon}^{\mu} - (\mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} + \mathfrak{T}_{\nu\mu} g^{\mu\alpha}) I_{\alpha\nu}^{\mu}. \quad (24)$$

Nun setzen wir Gl. (23) und (24) in (15) ein, wodurch diese Identität folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{T}_{\mu\varepsilon} g^{\mu\nu} + \mathfrak{T}_{\varepsilon\mu} g^{\mu\nu}),_{\nu} - (\mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} + \mathfrak{T}_{\nu\mu} g^{\mu\alpha}) I_{\alpha\nu}^{\mu} \\ & \quad - (\mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} + \mathfrak{T}_{\nu\mu} g^{\mu\alpha}) I_{\alpha\nu}^{\mu} = 0. \end{aligned} \quad (15a)$$

Der Ausdruck

$$\mathfrak{W}_{\varepsilon} = \mathfrak{T}_{\mu\varepsilon} g^{\mu\nu} \quad (25)$$

ist eine gemischte Tensordichte. Es gilt nun für jede gemischte Tensordichte zweiter Stufe

$$\mathfrak{A}_{\beta;\alpha}^{\alpha} = \mathfrak{A}_{\beta,\alpha}^{\alpha} - \mathfrak{A}_{\sigma}^{\alpha} I_{\beta\alpha}^{\sigma},$$

denn es folgt aus der Feldgleichung (11)²⁵⁾

$$I_{\sigma\alpha}^{\sigma} = 0.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung können wir die Identität (15) schließlich in die Form

$$\mathfrak{W}_{\varepsilon;\nu} = \mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} I_{\alpha\varepsilon}^{\mu} - (\mathfrak{T}_{\mu\varepsilon} g^{\mu\nu}),_{\nu} \quad (15b)$$

überführen.

In der allgemeinen Relativitätstheorie, wo das Feld $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ und die affine Konnektion $I_{\alpha\varepsilon}^{\mu}$ symmetrisch sind, d. h.

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0, \quad I_{\alpha\varepsilon}^{\mu} = 0,$$

ist die rechte Seite von (15b) identisch gleich Null. Infolgedessen verschwindet auch die Divergenz von $\mathfrak{W}_{\varepsilon}$:

$$\mathfrak{W}_{\varepsilon;\nu} = 0. \quad (26)$$

In der unitären Theorie ist auch die rechte Seite von (15b) gleich Null, aber nicht identisch, sondern erst als Folge der Feldgleichungen und zwar auf Grund der in der Arbeit I ausgesprochenen Hypothese, daß der Gültigkeitsbereich der Feldgleichungen nur auf die leere Raum-Zeit beschränkt ist.

²⁴⁾ Siehe Fußnote 5, S. 118.

²⁵⁾ Siehe Fußnote 6, S. 110.

Die physikalische Interpretation. Anlehnd an die allgemeine Relativitätstheorie und an die Gl. (1a) erklären wir die gemischte Tensordichte \mathfrak{T}_e^r

$$\mathfrak{T}_e^r = \mathfrak{U}_e^r + \mathfrak{B}_e^r \quad (27)$$

für die Impuls-Energie-Tensordichte des unitären Feldes, in welcher \mathfrak{U}_e^r den Gravitationsanteil

$$\mathfrak{U}_e^r = U_e^r \sqrt{-g} = (R_{\mu\nu} g^{\mu r} - \lambda g_{\mu r}) g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \quad (28)$$

und \mathfrak{B}_e^r den elektromagnetischen Anteil

$$\mathfrak{B}_e^r = V_e^r \sqrt{-g} = (H_{\mu r} + \lambda g_{\mu r}) g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \quad (29)$$

Die Gl. (26), die in der unitären Theorie erst infolge der Feldgleichungen gilt, spricht nun den Erhaltungssatz für Impuls und Energie aus.

Aus der Feldgleichung (12) folgt weiter, daß die beiden Anteile der Impuls-Energie-Tensordichte, der Gravitationsanteil $\mathfrak{U}_{\mu r}$ und der elektromagnetische Anteil $\mathfrak{B}_{\mu r}$, werden — ebenso wie in der allgemeinen Relativitätstheorie²⁸⁾ — gegeneinander im Gleichgewicht gehalten.

Der Impuls-Energie-Tensor im statischen kugelsymmetrischen Feld

Um die eben angeführte physikalische Interpretation weiter zu begründen, geben wir hier die Ausdrücke für den elektromagnetischen Anteil des Impuls-Energie-Tensors im statischen kugelsymmetrischen Feld an. Es ergibt sich aus den in der Arbeit I abgeleiteten Beziehungen nach Gl. (29)

$$V_1^r = V_4^r + b \frac{q_0^2}{r^4} \left(1 + \frac{b}{r^4} \right), \quad (30)$$

$$V_2^r = V_3^r = -b \frac{q_0^2}{r^4}. \quad (31)$$

Alle anderen V_e^r verschwinden.

Für $r \rightarrow \infty$ gehen die V_e^r asymptotisch in die Werte der allgemeinen Relativitätstheorie²⁸⁾ über.

Der Erhaltungssatz für elektrische Stromdichte

Anlehnd an die Maxwell'sche Theorie interpretieren wir die mit Gl. (6) definierte kontravariante Vektordichte \mathfrak{J}^μ als die elektrische Stromdichte, die infolge der Feldgleichung (11) in leerer Raum-Zeit verschwindet. Die Identität (16) spricht dann den Erhaltungssatz für die elektrische Stromdichte aus.

Der Erhaltungssatz für magnetische Stromdichte

In der Maxwell'schen Theorie interpretieren wir die mit Gl. (9) und (8) definierte kontravariante Vektordichte \mathfrak{M}^μ als die magnetische Stromdichte, die allerdings infolge der Feldgleichung (19) verschwindet. Wir nehmen diese Interpretation in die vorliegende unitäre Theorie über, da wir den Tensor $F_{\mu\nu}$ mit dem Feld (B, E) identifiziert haben. Die Identität (17) stellt den Erhaltungssatz für die magnetische Stromdichte dar.

²⁸⁾ Siehe Fußnote 19, S. 279.

Die Bewegungsgleichungen eines Probeteilchens

Über den analytischen Ausdruck für die Teilchenwirkung

In der Arbeit I haben wir die Frage nach dem richtigen Ausdruck für die Teilchenwirkung noch offen gelassen. Das unerwartete Resultat in der Formel (I.64), daß der gesamte Fluß eines Teilchens vom Radius der konzentrischen Kugel nicht unabhängig ist, haben wir auch nicht diskutiert. Wir beginnen jetzt mit der Erörterung der letzteren Frage und gehen dann zur ersten über.

In der Newtonschen und ebenso in der Maxwellschen Theorie begegnet man sich mit dem fundamentalen Naturgesetz, daß der gesamte Gravitationsfluß bzw. der gesamte elektrische Fluß, der aus beliebiger geschlossenen Oberfläche ausgeht, der gesamten Masse bzw. der gesamten elektrischen Ladung innerhalb dieser Oberfläche proportional ist. Es wurde in der allgemeinen Relativitätstheorie nachgewiesen, daß der gesamte Gravitationsfluß, der aus einer Kugel ausgeht, im deren Mittelpunkt sich ein Teilchen befindet, ebenso vom Radius der Kugel unabhängig ist²⁷⁾.

Die Formel (I.64) behauptet, daß der gesamte Gravitationsfluß, der aus einer konzentrischen Kugel herausgeht, nicht nur mit der Konstante m , sondern auch mit dem Produkt der Konstanten m und l bestimmt ist. Während der erstere Anteil vom Radius der Kugel unabhängig ist, sinkt der letztere mit der vierten Potenz der Entfernung herab, wobei die beiden Anteile gegeneinander wirken. Dies müssen wir als einen in leerer Raum-Zeit geltenden Naturgesetz ansehen, der im gewählten Hamiltonian implizite enthalten ist. Wir verstehen daher die Formel (I.64), die mit Hilfe von (I.69) in die Form

$$m = \frac{m_0}{1 + \frac{b}{x} \frac{q_0^2}{r^4}} \quad (32)$$

übergeführt werden kann, in dem Sinne, daß wir den gesamten aus beiden Anteilen zusammengesetzten Gravitationsfluß an der Oberfläche der Kugel die auf ihren Radius r_0 reduzierte Masse nennen. Den auf den Radius der Grenzkugelfläche zwischen der leeren Raum-Zeit und dem ruhenden Teilchen reduzierten Gravitationsfluß benennen wir die Ruhmasse des Teilchens. Den Koeffizienten $1/x$ in (32) sehen wir als den Faktor der Kopplung zwischen dem gravitationalen und elektromagnetischen Feld an. Er ist eine Naturkonstante.

Solange wir von der Rotation um eigene Achse absehen wollen, können wir für die Teilchenwirkung den Ansatz (I.11) nehmen. Er beschreibt das kugelsymmetrische Teilchen, das wir in der Newtonschen Mechanik „Massenpunkt“ nennen. Falls die Teilchen sich in so großen Abständen gegeneinander befinden, daß die Kugelsymmetrie des Feldes vorausgesetzt werden kann, können wir bei der Beschränkung auf die Translationsbewegung den Ansatz (I.11) für jedes Teilchen benutzen.

Für die Teilchen ohne die Kugelsymmetrie oder mit dem Spin müssen wir einen anderen analytischen Ausdruck für die Teilchenwirkung wählen.

²⁷⁾ Siehe Fußnote 19, S. 215.

Die Bewegungsgleichungen

Wir bestimmen die Bewegungsgleichungen aus dem bekannten Variationsprinzip der stationären Teilchenwirkung²⁸⁾, indem wir jede Teilchenwirkung einer Variation von Koordinaten unterwerfen und diese gleich Null setzen:

$$\delta_{x_\sigma} W_2^{(k)} = 0. \quad (33)$$

Wir sind uns aber wohl bewußt, daß diese Ableitung der Bewegungsgleichungen keine Beweiskraft besitzt: Nach Einstein und Infeld²⁹⁾ ist die Bewegung der als Singularitäten im Feld dargestellten Teilchen ausschließlich durch die Feldgleichungen zusammen mit den 4 Identitäten von Bianchi bestimmt. Dasselbe gilt auch für die Bewegung eines Probeteilchens³⁰⁾. Vom mathematischen Standpunkt aus ist eine solche Ableitung der Bewegungsgleichungen allerdings bedeutend schwieriger. Deshalb benützen wir hier zu diesem Zweck das in der allgemeinen Relativitätstheorie bewährte Variationsprinzip²⁸⁾, um festzustellen, ob die vorliegende unitäre Theorie der Forderung entspricht, daß sie in schwachen Feldern in die allgemeine Relativitätstheorie übergeht. Die strenge Ableitung der Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen wird in weiteren Arbeiten des Verfassers erörtert*).

Nach Gl. (1.11) haben wir

$$-\int m_0^{(k)} \delta_{x_\sigma} ds + \int q_0^{(k)} \delta_{x_\sigma} (A_\epsilon dx_\epsilon) = 0. \quad (33a)$$

Zuerst berechnen wir das erste Glied. Nach dem Vorgang von Eddington³¹⁾ erhalten wir

$$-\int m_0^{(k)} \delta_{x_\sigma} ds = \int m_0^{(k)} w_\sigma \delta x_\sigma ds, \quad (34)$$

wobei

$$w_\sigma = g_{\underline{\sigma}\underline{\sigma}} \frac{d^2 x_\epsilon}{ds^2} + \left(g_{\underline{\mu}\sigma,\nu} - \frac{1}{2} g_{\underline{\mu}\underline{\nu},\sigma} \right) \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}. \quad (35a)$$

Mit Hilfe der Beziehung (10) ersetzen wir die partiellen Ableitungen von $g_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ mit $\Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon$:

$$w_\sigma = g_{\underline{\sigma}\underline{\sigma}} \frac{d^2 x_\epsilon}{ds^2} + (g_{\underline{\sigma}\underline{\sigma}} \Gamma_{\underline{\mu}\underline{\nu}}^\epsilon + 2 g_{\underline{\mu}\underline{\sigma}} \Gamma_{\underline{\nu}\underline{\sigma}}^\epsilon) \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}. \quad (35b)$$

Es folgt nun aus der Variation des zweiten Gliedes in (33a):

$$\int q_0^{(k)} \delta_{x_\sigma} (A_\epsilon dx_\epsilon) = \int \frac{1}{a} q_0^{(k)} F_{\sigma\epsilon} \frac{dx_\epsilon}{ds} \delta x_\sigma ds. \quad (36)$$

Diesen Ausdruck haben wir durch partielle Integration und mit Hilfe der Formeln (22) und (7) erhalten.

Setzen wir nun Gl. (34) und (36) in (33a) ein, finden wir

$$\int \left(m_0^{(k)} w_\sigma + \frac{1}{a} q_0^{(k)} F_{\sigma\epsilon} \frac{dx_\epsilon}{ds} \right) \delta x_\sigma ds = 0. \quad (33b)$$

²⁸⁾ Siehe z. B.: L. Landau, E. Lifschitz, Teorija polja, 2. Aufl., Moskva-Lenigrad 1948, S. 286.

²⁹⁾ A. Einstein, L. Infeld, Canad. J. Math. 1, 209 (1949).

³⁰⁾ L. Infeld, A. Schild, Rev. Mod. Phys. 21, 408 (1949).

* Anmerkung bei der Korrektur: Der Verfasser hat inzwischen das Problem der Bewegung von zwei Teilchen nach der Methode von Einstein-Infeld²⁹⁾¹²⁾ in der niedrigsten Annäherung bearbeitet und festgestellt, daß es sich aus den Feldgleichungen der vorliegenden unitären Theorie die richtigen Bewegungsgleichungen ergeben.

³¹⁾ Siehe Fußnote 19, S. 79.

Die Translationsbewegungsgleichungen eines Massenpunktes lauten daher

$$m_0^{(k)} w_\sigma + \frac{1}{a} q_0^{(k)} F_{\sigma s} \frac{dx_s}{ds} = 0. \quad (37a)$$

Wir gehen noch zu kontravarianten Komponenten über

$$m_0^{(k)} w^e + \frac{1}{a} q_0^{(k)} F_{\sigma s} h^{\sigma e} \frac{dx_s}{ds} = 0, \quad (37b)$$

wo

$$w^e = w_\sigma h^{\sigma e} = \frac{d^2 x_e}{ds^2} + \left(g_{\mu \sigma, \nu} - \frac{1}{2} g_{\mu \nu, \sigma} \right) h^{\sigma e} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \quad (38a)$$

$$= \frac{d^2 x_e}{ds^2} + (I_{\mu \nu}^e + 2 h^{\sigma e} g_{\mu \alpha} I_{\nu \alpha}^\alpha) \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}. \quad (38b)$$

Beim Heraufziehen von Indizes benutzen wird den symmetrischen kontravarianten Tensor $h^{\alpha \beta}$, der aus der Determinante von $h_{\alpha \beta} \equiv g_{\alpha \beta}$ und nicht durch Symmetrisieren von $g^{\alpha \beta}$ gebildet wird:

$$h^{\alpha \beta} = \frac{\partial}{\partial h_{\alpha \beta}} \log \det h_{\mu \nu} \neq \frac{1}{2} (g^{\alpha \beta} + g^{\beta \alpha}).$$

Zwei Spezialfälle der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen in der Newton-Maxwellschen Annäherung. Wie Einstein gezeigt hat¹⁾, nimmt der mit Gl. (38a) gegebene Vektor w^e in der linearen Annäherung folgende Form ein

$$w^e = \frac{d^2 x_e}{ds^2} - \frac{1}{2} g_{44, \sigma} h^{\sigma e},$$

deren dreidimensionale aus der Arbeit I sich ergebenden Vektorschreibweise ($\varrho = 1, 2, 3$) ist

$$w = \frac{d^2 r}{dt^2} + \text{grad} \frac{1}{2} \gamma.$$

Die Größe $\frac{1}{2} \gamma$ spielt hier die Rolle des Gravitationspotentials.

Auch das zweite Glied in Gl. (37b) führen wir in die dreidimensionale Vektorschreibweise ($\varrho = 1, 2, 3$) über

$$\frac{1}{a} q_0^{(k)} F_{\sigma s} g^{\sigma \varrho} \frac{dx_s}{ds} = - q_0^{(k)} \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{B}] \right).$$

Setzen wir nun die letzten zwei Gleichungen in (37b) ein, erhalten wir die bekannte Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \text{grad} \frac{1}{2} \gamma + \frac{q_0^{(k)}}{m_0^{(k)}} \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{B}] \right). \quad (39)$$

Dieses Ergebnis ist ein weiterer Beweis, der für die vom Verfasser vorgeschlagene Identifizierung der Felder spricht.

Die Bewegungsgleichungen eines Probeteilchens im statischen kugelsymmetrischen Feld. Um diese Bewegungsgleichungen abzuleiten, setzen wir zuerst die in der Arbeit I berechneten Werte von $g_{\mu \nu}$ in Gl. (38a) ein. Da alle $F_{\mu \nu}$ mit der Ausnahmen von $F_{14} = -F_{41}$ verschwinden, lauten

die gesuchten Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{\alpha'}{2\alpha} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - \frac{r}{\alpha} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \frac{r}{\alpha} \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{\gamma'}{2\alpha} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{a} \frac{q_0^{(k)}}{m_0^{(k)}} \frac{F_{14}}{\alpha} \frac{dt}{ds} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0, \quad (41)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{\gamma'}{\gamma} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} + \frac{1}{a} \frac{q_0^{(k)}}{m_0^{(k)}} \frac{F_{14}}{\gamma} \frac{dr}{ds} = 0. \quad (43)$$

Den Energieintegral stellt hier die Beziehung für das Intervall ds dar:

$$\alpha \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \gamma \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = -1. \quad (44)$$

Für die Funktionen α , γ und F_{14} gelten folgende Beziehungen, die aus Gln. (I.60), (I.62), (I.67) und (I.69) folgen:

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{3} r^2 + b \frac{q_0^2}{r^2}, \quad (45)$$

$$\gamma = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{b}{\alpha} \frac{q_0^2}{r^4} \right), \quad (46)$$

$$F_{14} = -F_{41} = -\frac{q_0}{r^2} \sqrt{-\frac{b}{\alpha} \left(1 - \frac{\lambda}{6x} + \frac{2m}{xr^3} - \frac{5b}{2\alpha} \frac{q_0^2}{r^6} \right)}. \quad (47)$$

Die Bewegungsgleichungen (40)–(43) und der Energieintegral (41) haben hier dieselbe Form wie in der allgemeinen Relativitätstheorie. Von dieser unterscheiden sie sich nur in Gln. (46) und (47) insofern, daß die Ausdrücke in den Klammern in der Relativitätstheorie gleich Eins sind. Dies trifft aber im schwachen unitären Feld auch zu.

Die Bewegungsgleichungen im reinen Gravitationsfeld erhalten wir, indem wir für die elektrische Ladung q_0 in Gln. (45)–(47) Null einsetzen, wodurch die Gln. (40)–(47) genau die Form einnehmen, die in der allgemeinen Relativitätstheorie gilt.

Es sei abschließend noch bemerkt, daß wir die Bewegungsgleichungen auch aus der Formel (38b) berechnen können und zu denselben Resultaten kommen, aber dieser Weg ist länger, als wenn man Gl. (38a) zu diesem Zweck benutzt.

Prag, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

Bei der Redaktion eingegangen am 8. März 1957.

Turbulenz und Wellenanschwemmung

Von K. Schuster

Inhaltsübersicht

Wie sich mit Hilfe der Navier-Stokeschen Gleichungen zeigen lässt, können sich in einem von einer laminaren Strömung erfüllten Kanal entgegen der Strömungsrichtung Wellen mit exponentiell zunehmender Amplitude („entdämpfte“ Wellen) ausbreiten. Aus der Bedingung für das Auftreten dieser Wellen lässt sich eine Formel für den kritischen Wert der Reynoldschen Zahl ableiten.

Um den Einsatz der turbulenten Strömung zu erklären, wurden schon vor längerer Zeit grundlegende theoretische Untersuchungen mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen durchgeführt¹⁾. Dabei konnte aber bisher nicht die Instabilität der stationären laminaren Strömung bewiesen werden; vielmehr handelte es sich um ein Studium der mit dem Anlaufvorgang verknüpften zeitlichen Veränderung des Strömungsbildes, die von der Prandtl'schen Grenzschicht ihren Ausgang nimmt.

Vom akustischen Aspekt aus liegt es nahe zu untersuchen, ob sich die Erscheinung der Turbulenz in Zusammenhang mit dem Auftreten von Querresonanz-Schwingungen bringen lässt. Zu diesem Zweck soll eine laminare Strömung zwischen zwei ebenen, starren Wänden ($z = \pm d$) betrachtet werden, der als Störung ein spezieller Wellenvorgang überlagert ist. Als Schwingungsform („mode“) der Welle, die sich in Richtung der x -Achse ausbreiten soll, sei willkürlich die dem ersten Oberton der Querschwingung entsprechende Form gewählt. Ebenso gut könnte der Betrachtung eine andere Schwingungsform zugrunde gelegt werden, soweit sie nur eine Querbewegung enthält. Der Ansatz für das gesamte Strömungsfeld lautet daher

$$\begin{aligned} u &= U \cdot e^{-i\gamma x} \cdot \cos \frac{\pi z}{d} \cdot F(z) \cdot e^{i\omega t} + U_0 \left(1 - \frac{z^2}{d^2}\right) \\ w &= W \cdot e^{-i\gamma x} \cdot \sin \frac{\pi z}{d} \cdot G(z) \cdot e^{i\omega t} \\ p &= P \cdot e^{-i\gamma x} \cdot \cos \frac{\pi z}{d} \cdot H(z) \cdot e^{i\omega t} + P_0 (1 - \zeta x). \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei sind u und w die Längs- und die Querkomponente der Geschwindigkeit, p der Druck; U, W, P bedeuten die entsprechenden Amplituden der

¹⁾ Vgl. vor allem W. Tollmien, Göttinger Nachrichten 1929, und H. Schlichting, Ann. Physik **14**, 905 (1932) und Göttinger Nachrichten 1932, 1933, 1935. Kurze Übersichten über den Stand des Turbulenzproblems findet man in den Büchern: A. Sommerfeld, Mechanik der deformierbaren Medien, Leipzig, 1954, S. 260ff. u. G. Hamel, Mechanik der Kontinua, Stuttgart, 1956, S. 185ff.

Wechselanteile, γ die Ausbreitungskonstante des Wellenvorgangs, U_0 die Geschwindigkeit der Gleichströmung in der Kanalmitte. Weiterhin gilt $\zeta P_0 = 2 U_0 \varrho v/d^2$, wobei ϱ die Mediumdichte und v den kinematischen Zähigkeitskoeffizienten bezeichnet. Die Funktionen F, G, H sind gerade Funktionen von z , deren zweite Ableitungen im folgenden vernachlässigt werden und die für $z = 0$ den Wert 1 annehmen. Die Funktion $F(z)$ muß an den Wänden verschwinden, damit dort die Bedingung des Haftens der Mediumteilchen gewährleistet ist. Für verschwindende Reibung und Strömung besitzen die drei Funktionen den Wert 1 im gesamten z -Bereich mit Ausschluß der Wände. Sie spielen in der weiteren Betrachtung keine Rolle mehr.

Mit dem Ansatz (1) haben wir in das System der Navier-Stokeschen Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung einzugehen. In die letztere ist dabei die Druck-Dichte-Beziehung entsprechend der Adiabase eingeführt. Die Schallgeschwindigkeit ist mit c bezeichnet. Das Gleichungssystem lautet dann:

$$\begin{aligned} u + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{4}{3} v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{3} v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ w + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} - v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{4}{3} v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{3} v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \dot{p} + c^2 \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + w \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Aus der Forderung, daß die mit dem Faktor $e^{i\omega t}$ behafteten Wechselanteile für sich die Gleichungen erfüllen müssen, ergibt sich, wenn man noch alle Funktionen von z in Potenzreihen entwickelt denkt, durch Gleichsetzen der z -unabhängigen Glieder ein System von drei homogenen linearen Gleichungen für die drei Amplituden U, W, P . Das Verschwinden der Determinante liefert die Bestimmungsgleichung für die Ausbreitungskonstante γ :

$$\begin{vmatrix} \left(i \omega - i U_0 \gamma + \frac{4}{3} v \gamma^2 + \frac{\pi^2 v}{d^2} \right) & + \frac{1}{3} i \frac{\pi v}{d} \gamma & - i \gamma \\ - \frac{1}{3} i \frac{\pi v}{d} \gamma & \left(i \omega - i U_0 \gamma + v \gamma^2 + \frac{4}{3} \frac{\pi^2 v}{d^2} \right) & - \frac{\pi}{d} \\ - \left(i c^2 \gamma + \frac{2 U_0 v}{d^2} \right) & \frac{\pi c^2}{d} & (i \omega - i U_0 \gamma) \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, folgende dimensionslosen Größen einzuführen:

$$\varepsilon = \frac{\omega d}{\pi c}; \quad \lambda = \frac{\gamma d}{\pi}; \quad r = \frac{\pi v}{c d}; \quad m = \frac{U_0}{c}.$$

Es ist also ε die auf die Grenzfrequenz $\omega_0 = \frac{\pi c}{d}$ des Kanals bezogene Frequenz und m die Machsche Zahl. Die Determinantengleichung (3) nimmt dann die Form an:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{4}{3} r \lambda^2 - i m \lambda + i \varepsilon + r \right) & + \frac{1}{3} i r \lambda & - i \lambda \\ - \frac{1}{3} i r \lambda & \left(r \lambda^2 - i m \lambda + i \varepsilon + \frac{4}{3} r \right) & - 1 \\ - \left(i \lambda + \frac{2 m r}{\pi^2} \right) & + 1 & (- i m \lambda + i \varepsilon) \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Es ergibt sich also für die Unbekannte λ im allgemeinen eine Gleichung fünften Grades.

Im Fall verschwindender Reibung und Strömung ($r = m = 0$) resultiert die Gleichung zweiten Grades $\lambda^2 = -(1 - \varepsilon^2)$. Im folgenden sei immer $\varepsilon \leq 1$ angenommen, so daß die Frequenz ω bei der gewählten Schwingungsform im Sperrbereich des Kanals liegt. Dann lautet die Lösung $\lambda = \pm i\sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

Im Falle verschwindender Strömung ($m = 0$) erhält man eine biquadratische Gleichung, deren Wurzeln im zweiten und vierten Quadranten der komplexen λ -Ebene liegen. Bei der hier benutzten Form des Wellenfaktors $e^{-i\gamma z}$ bedeutet ein γ -Wert (bzw. λ -Wert) im vierten Quadranten eine in Richtung der Strömung fortschreitende räumlich gedämpfte Welle, ein γ -Wert im zweiten Quadranten eine entgegen der Strömung fortschreitende räumlich gedämpfte Welle. Man kann sich vorstellen, daß solche Wellen von der Strömungsstelle $x = 0$ aus nach beiden Richtungen ablaufen.

Aus Gl. (4) ist auch sofort der Spezialfall verschwindender Reibung ($r = 0$) abzulesen. Unter der Annahme $m \ll 1$ ergibt sich dann eine kubische Gleichung mit den Wurzeln

$$(2) \quad \lambda_1 = \frac{\varepsilon}{m}; \quad \lambda_2 = -\varepsilon m + i\sqrt{1 - \varepsilon^2}; \quad \lambda_3 = -\varepsilon m - i\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Wenn die Möglichkeit entdämpfter Wellen erörtert werden soll, so ist das Augenmerk besonders auf die Wurzel λ_3 zu richten, denn diese liegt im dritten Quadranten. Das bedeutet aber den Ablauf einer entdämpften Welle entgegen der Strömungsrichtung.

Um zu einer allgemeinen Diskussion der Gl. (4) zu gelangen, sollen bei der Entwicklung der Determinante innerhalb der Faktoren von λ^n die Quadrate und Produkte von m und r gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigt werden. Dann ergibt sich folgende Gleichung fünften Grades:

$$(3) \quad f(\lambda) = -\frac{4}{3}i m r^2 \cdot \lambda^5 + r \cdot \lambda^4 - i m \cdot \lambda^3 + \left(i\varepsilon + 2r - \frac{7}{3}\varepsilon^2 r\right) \cdot \lambda^2 + i m (3\varepsilon^2 - 1) \cdot \lambda + i\varepsilon (1 - \varepsilon^2) + r \left(1 - \frac{7}{3}\varepsilon^2\right) = 0.$$

Entwickelt man $f(\lambda)$ in der Umgebung der Stelle $\lambda_0 = -i\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, so erhält man die Formel

$$(4) \quad \lambda - \lambda_0 = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot m - \frac{2}{3}\varepsilon^2 r}{1 - \varepsilon^2 + \frac{m^2}{\varepsilon^2}} \cdot \left(-\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2} + i m\right).$$

Der Summand mit λ^5 wirkt sich in dieser Darstellung nicht aus.

Aus (6) ist abzulesen, daß für einen kritischen Wert

$$(5) \quad \left(\frac{m}{r}\right)_k = \frac{\frac{2}{3}\varepsilon^2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

des Verhältnisses m/r der Wert λ an der Stelle $\lambda_0 = -i\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ die imaginäre Achse überschreitet. Er gelangt mit wachsendem m/r vom vierten in den dritten Quadranten. Für

$$\frac{m}{r} > \left(\frac{m}{r}\right)_k$$

existiert also eine entgegen der Strömungsrichtung fortschreitende räumlich entdämpfte Welle. Da der (negative) Realteil von λ unmittelbar nach dem Überschreiten der imaginären Achse noch sehr klein ist, handelt es sich bei solchen λ -Werten um zickzackförmig verlaufende Wellen, die sehr steil auf die Wände auftreffen.

Sieht man die Kanalbreite $2d$ als das für den Wert der Reynoldsschen Zahl R maßgebende Längenmaß an, so ist

$$R = 2\pi \cdot \frac{m}{r}. \quad (8)$$

Danach ergibt sich als kritischer Wert der Reynoldsschen Zahl

$$R'_k = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \quad (9)$$

Der Strich am Buchstaben R'_k soll andeuten, daß die hier angegebene Größe aus verschiedenen Gründen noch nicht mit der gewöhnlichen kritischen Reynoldsschen Zahl R_k identisch sein kann. Vor allem hängt der Wert R'_k noch von der Frequenz der in der Theorie als zeitlich sinusförmig angenommenen Störung ab und kann daher, je nach der Lage von ε im Intervall zwischen 0 und 1, alle Werte zwischen 0 und ∞ annehmen.

Zur Berechnung der gewöhnlichen, „effektiven“ Reynoldsschen Zahl müßte man in der Strömung räumlich statistisch verteilt Störquellen annehmen, die insgesamt ein „weißes“ Spektrum bilden. Aus diesem weißen Rauschen wird durch die Wirkung der erzwungenen angeregten Querresonanz eine verhältnismäßig schmale Spektrallinie ausgefiltert. Die so entstehende spektrale Verteilung sei durch die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ beschrieben; die Halbwertsbreite der Kurve $\varphi^2(\varepsilon)$ habe den Wert 2δ . Das Integral $\int_0^1 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$ sei auf 1 normiert.

Der Wert R_k muß dann nach der Formel berechnet werden:

$$R_k = \int_0^1 R'_k \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4\pi}{3} \int_0^1 \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (10)$$

Nähert man die Resonanzkurve $\varphi(\varepsilon)$ durch eine Rechteckkurve an, deren Flanken an den Stellen $\varepsilon = 1 \pm \delta$ liegen, so ergibt sich

$$R_k = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\delta} = \frac{8\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{\omega_0}{\Delta\omega}}. \quad (11)$$

Danach wäre die kritische Reynoldssche Zahl durch den „Gütefaktor“ $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\delta}$ der Querresonanz bestimmt.

Zur Berechnung des Gütefaktors muß man die erzwungene Querresonanzschwingung untersuchen. Zu diesem Zweck soll die Bewegungsgleichung für die Querrichtung durch ein inhomogenes Störungsglied $A e^{i\omega t}$ ergänzt werden. Aus den beiden anderen Gleichungen des Systems homogener linearer Gleichungen für die Amplituden U, W, P , die aus (2) mit Hilfe von (1) erhalten wurden, können dann die Amplitudenvorhältnisse U/W und P/W bestimmt werden. Setzt man diese Verhältnisse in die inhomogene Gleichung für W

ein, so ergibt sich W/A als Funktion von ε . Der Betrag dieser Funktion ist bis auf einen unwesentlichen Faktor mit $\varphi(\varepsilon)$ identisch. Mit der Annahme $\lambda = 0$ ergibt sich dann $\delta = \frac{2}{3} r$. Dementsprechend wird

$$R_k = \frac{4\pi}{\sqrt{3}r} = 4 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{3} \cdot \frac{c d}{\nu}}. \quad (12)$$

Setzt man die Materialkonstanten von Wasser ein ($c = 1,5 \cdot 10^5 \text{ cm/s}$; $\nu = 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$), so wird $R_k = 11200 \cdot \sqrt{2} \text{ d/cm}$.

Wenn man an einen Vergleich mit der Erfahrung denkt, so ist noch eine weitere Tatsache zu beachten: In den Wert der Reynoldsschen Zahl ist nach Definition der für stationäre Strömungen geltende Wert ν_s der Scher-Viskosität einzusetzen. Für die (instationären, dynamischen) Schallvorgänge, die hier den Gegenstand der Untersuchung bilden, wäre daneben noch die Kompressionsviskosität maßgebend, die sich in der akustischen Molekularabsorption äußert. Nimmt man in einer groben Betrachtungsweise an, daß sich die Wirkung der Kompressionsviskosität auf die Schallabsorption durch einen entsprechend erhöhten Wert ν_d der Scher-Viskosität erfassen läßt, so wäre die Formel (12) in folgender Weise zu korrigieren:

$$R_k = \frac{2 U_0 d}{\nu_s} = 2 \pi \cdot \frac{m}{\nu_d} \cdot \frac{\nu_d}{\nu_s} = \frac{\nu_d}{\nu_s} \cdot 4 \sqrt{\frac{\pi}{3} \cdot \frac{c d}{\nu_s} \cdot \frac{\nu_s}{\nu_d}}.$$

Es ergibt sich dann also

$$R_k = 4 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{3} \cdot \frac{c d}{\nu_s} \cdot \frac{\nu_s}{\nu_d}}. \quad (13)$$

Für Wasser besitzt ν_d/ν_s etwa den Wert 3. Dann folgt also als kritischer Wert der Reynoldsschen Zahl für Wasser:

$$R_k = 19400 \cdot \sqrt{2} \text{ d/cm}.$$

Wenn infolge gelöster Gase oder aus anderen Ursachen die Schallabsorption der Flüssigkeit erhöht ist, wäre entsprechend der Gl. (11) mit kleineren Werten für R_k zu rechnen. Da die in der Literatur angegebenen Werte von R_k bei Flüssigkeitsströmungen zwischen 1000 und 30000 liegen und da die verwendeten Kanaldurchmesser gewöhnlich die Größenordnung von 1 cm haben dürften, könnte man von einer Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment sprechen. Für den hier dargelegten Versuch einer akustischen Theorie der Turbulenz spricht auch die Beobachtung, daß sich in einer turbulenten Strömung die Störungen vielfach stromaufwärts ausbreiten, was mit dem aus der Theorie folgenden Auftreten von entdämpften Wellen, die sich stromaufwärts ausbreiten, in Verbindung gebracht werden könnte. Im übrigen müßte durch entsprechende Versuche geklärt werden, inwieweit die hier skizzierten Überlegungen mit der Wirklichkeit der Turbulenz etwas zu tun haben. Möglicherweise würden durch die Berücksichtigung der hier vernachlässigten nicht-linearen Schalleffekte noch weitere Züge der Turbulenzerscheinungen abzuleiten sein, da mit diesen Effekten grundsätzlich eine Rückwirkung des Schallfeldes auf die ursprünglich vorliegende laminare Gleichströmung verbunden ist.

Jena, Theoretisch-physikalisches Institut der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 22. März 1957.

Die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes der Sb—Cs-Photokathoden im Temperaturbereich -170°C bis $+20^{\circ}\text{C}$

Von Zs. Náray

Mit 5 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Es wurde die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes der Sb—Cs-Photokathoden im Temperaturbereich -170°C bis $+20^{\circ}\text{C}$ untersucht. In der Nähe der Grenzwellenlänge wurde ein monotoner Abfall der Empfindlichkeit mit abnehmenden Temperaturen gefunden. Bei kürzeren Wellenlängen ist die Empfindlichkeit in einem weiten Temperaturbereich unabhängig von der Temperatur und erst bei den tiefsten Temperaturen ergab sich ein steiler Abfall der Empfindlichkeit.

Die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes steht im Zusammenhang sowohl mit praktischen wie auch theoretischen Fragen der Physik.

Vom praktischen Standpunkt ist es im Hinblick auf verschiedene meßtechnische Anwendungen wichtig, hochempfindliche Photokathoden zu entwickeln, deren Empfindlichkeit von der Temperatur möglichst unabhängig ist.

Mit der Frage der Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes bei Metallen beschäftigt sich — vom theoretischen Standpunkt aus — Fowler¹⁾. Nach der Theorie von Fowler wird die Photoemission nur dann von der Temperatur der Photokathode beeinflußt, wenn der Photoeffekt durch Licht einer der Grenzwellenlänge nahen Wellenlänge hervorgerufen wird. In diesem Fall besteht nämlich der Photostrom zum größten Teil aus Elektronen, die in der Photokathode große kinetische Energie haben, und die Temperatur der Photokathode beeinflußt die Energieverteilung gerade dieser Elektronen. Die Voraussagen der Fowlerschen Theorie wurden durch mehrere an Metallen ausgeführten Untersuchungen unterstützt, zum größten Teil in einem Temperaturbereich, der höher liegt als die Zimmertemperatur.

Die Eigenschaften von Legierungen und Halbleitern sind bekannterweise komplizierter als die der Metalle, so daß theoretisch²⁾ hier auch in der Temperaturabhängigkeit des Photostroms ein Unterschied gegenüber den Metallen zu erwarten ist. Es wurde deshalb diese Temperaturabhängigkeit bei einer aus einer Legierung bestehenden Photokathode untersucht³⁾.

¹⁾ R. H. Fowler, Phys. Rev. **38**, 45 (1931).

²⁾ S. W. Wonsowski, A. W. Sokolow u. A. S. Wexler, Uspechi Phys. Nauk. **56**, 477 (1955) bzw. Fortschritte der Physik **4**, 115, 216 (1956).

³⁾ Wir deuten hier nur an, daß bei einigen einfacheren Photokathoden auf Grund der experimentellen Bestimmung der Temperaturabhängigkeit des Photostroms die Energieverteilung der Metallelektronen (z. B. durch Umkehrung der Fowlerschen Methode) bestimmt werden kann.

In unseren Untersuchungen bestimmten wir die Empfindlichkeit der Sb-Cs-Photokathoden im Temperaturbereich -170°C bis $+20^{\circ}\text{C}$. Unsere Wahl fiel auf diese Photokathoden, da diese gerade wegen ihrer großen Empfindlichkeit vielseitige Verwendung finden und eine verhältnismäßig große Empfindlichkeitsänderung mit der Temperatur zeigen. Die Empfindlichkeit ändert sich im Durchschnitt drei- bis vierfach, bei einzelnen Kathoden auch zehnfach⁴⁾. Die Untersuchungen wurden in der Nähe der Grenzwellenlänge der Photokathoden (Abb. 1) bei $\lambda = 6250\text{ \AA}$ und zur Kontrolle bei einigen kürzeren Wellenlängen durchgeführt.

Abb. 2 zeigt die Meßanordnung. Der Eintrittspalt des Monochromators (M) wurde mit einem Lichtstrahlenbündel einer Spektrallampe (L) beleuchtet. Das aus dem Monochromator austretende monochromatische Strahlenbündel, dessen Wellenlänge λ ist, fällt auf die Photozelle P_1 , die in der Kühlvorrichtung (C)⁵⁾ untergebracht ist. Das Schema der Kühlvorrichtung ist in Abb. 3 zu sehen. Die Temperatur der Photokathode der Photozelle P_1 wurde mit dem Thermoelement T_e gemessen, dessen eine Lötstelle in schmelzendes Eis eingetaucht war.

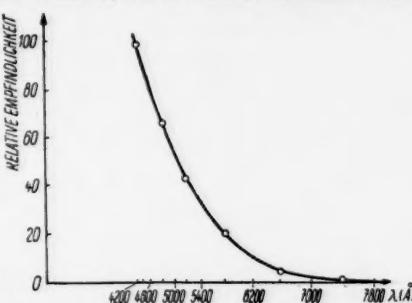


Abb. 1. Die relative Empfindlichkeit der Sb-Cs-Photokathode in der Nähe der Grenzwellenlänge

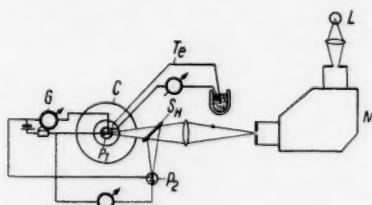


Abb. 2. Meßanordnung. Der Strom der Photozelle P_1 wurde mit dem Galvanometer G bei verschiedenen Temperaturen, die mit dem Thermoelement T_e bestimmt wurden, gemessen. Die Photozelle P_2 und der halbdurchlässige Spiegel S_H dienen zur Messung der einfallenden Intensität

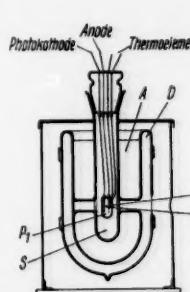


Abb. 3.
Kühlvorrichtung

Die Temperaturabhängigkeit der Empfindlichkeit der Photokathode wurde in folgender Weise bestimmt: das Dewar-Gefäß (D) wurde mit flüssiger Luft (A) gefüllt, und der Strom J_1 des Galvanometers (G) bei verschiedenen Temperaturen T bestimmt. Die Temperatur wurde an einem, in den Thermoelementkreis eingeschalteten Galvanometer abgelesen. Die Meßperiode war

⁴⁾ Zs. Náray, J. Sci. Instrum. **33**, 476 (1956).

⁵⁾ A. Ádám u. P. Varga, Magyar Fizikai Folyóirat **3**, 249 (1955).

ungefähr 6–8 Stunden; in dieser Zeit sank die Temperatur der Photokathode von der Zimmertemperatur auf die Temperatur der flüssigen Luft. Die Kühlgeschwindigkeit der Kathode war ungefähr $30^{\circ}\text{C}/\text{Stunde}$. Nach dieser Abkühlung wurde der Rest der sich noch im Kühler befindenden flüssigen Luft entfernt und in einer ungefähr 6 Stunden langen Erwärmungsperiode die Temperaturabhängigkeit ähnlich wie bei der Kühlungsperiode festgestellt. Bei Temperaturänderungen, die größer als $30^{\circ}\text{C}/\text{Stunde}$ sind, konnte möglicherweise ein Unterschied zwischen den Kühl- und Erwärmungskurven auftreten. In unserer Anordnung war das Temperaturmeßverfahren zur Feststellung schneller Temperaturveränderungen nicht geeignet. Jedoch bei Temperaturveränderungen bis $30^{\circ}\text{C}/\text{Stunde}$ konnte kein Unterschied zwischen den Kurven festgestellt werden. Um die

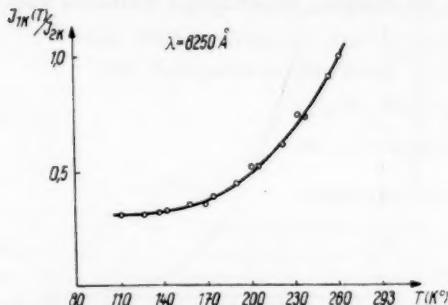


Abb. 4. Die Temperaturabhängigkeit der Empfindlichkeit der Cs-Sb-Photokathoden bei der Wellenlänge $\lambda = 6250 \text{ \AA}$. Die Kurve wurde aus vier Meßreihen (zwei Kühl- und zwei Erwärmungsperioden) berechnet

Meßperioden nicht zu groß zu machen, wurde der Raum S der Kühlvorrichtung mit trockener Luft gefüllt.

Da für die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes nur der Photostrom der Photozelle P_1 von Belang ist, wurde in den beiden Meßperioden der Dunkelstrom J_{1d} bei den verschiedenen Temperaturen festgestellt. Mit den Meßresultaten $J_1(T)$ und $J_{1d}(T)$ wurde der Photostrom $J_{1K}(T) = J_1(T) - J_{1d}(T)$ ermittelt.

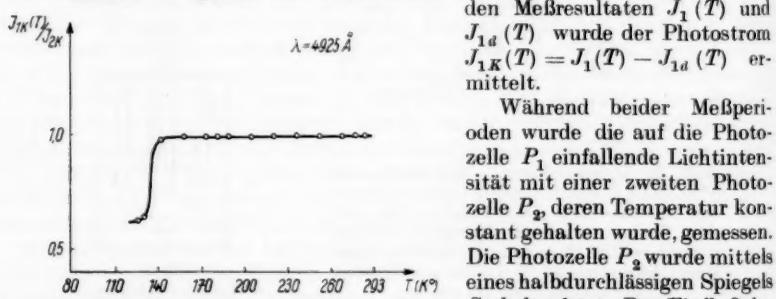


Abb. 5. Die Temperaturabhängigkeit der Empfindlichkeit der Photokathoden Sb-Cs bei der Wellenlänge $\lambda = 4925 \text{ \AA}$

der Photozelle P_1 auf den Photostrom bezogen wurde.

Bei den Messungen wurde darauf geachtet, daß sich am Eintrittspunkt des Lichtbündels in das Dewar-Gefäß der Kühlvorrichtung kein Dampfniederschlag bildete. Dies war einerseits durch die Temperaturisolation des

Dewar
Luft (3)

In
dargest
unters
längen
Verla

Die
sowisk
des Ph

B
misch

Dewar-Gefäßes, andererseits durch einen Ventilator, der trockene, warme Luft (30° C) an die äußere Wand des Dewar-Gefäßes anblies, gesichert.

In der Nähe der Grenzwellenlänge $\lambda = 6250 \text{ \AA}$, wurden die in Abb. 4 dargestellten Meßresultate erhalten. Die Empfindlichkeit ändert sich im untersuchten Temperaturbereich ungefähr 3–3,5fach. Bei kürzeren Wellenlängen ($\lambda = 4925 \text{ \AA}$) geht die $J_{1K}(T)/J_{2K}$ -Kurve in den in Abb. 5 abgebildeten Verlauf über.

Die hier erhaltenen Meßresultate stimmen qualitativ mit der von Wonsowsky, Sokolow und Wexler²⁾ vorausgesagten Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes der Legierungen überein.

P. Varga sei für Ratschläge bezüglich der Kühlvorrichtung auch an dieser Stelle gedankt.

Budapest, Zentralforschungsinstitut für Physik, Abteilung für Kosmische Strahlung.

Bei der Redaktion eingegangen am 12. März 1957.

ein

zu
Bez

für
gilt

Die
der
ene

eine
dem
und

Dah
ß' i

Für

ges
Pri

Die

wob
erst

emi

d. h
Nac

Über das Bremsgesetz mittelschneller Elektronen in Metallen

Von W. Brauer

Inhaltsübersicht

Das in der Theorie der Sekundäremission¹⁾ auftretende Integral I_0 wird zunächst geeignet umgeformt und dann in eine Taylor-Reihe entwickelt. Dieselbe gestattet für Umklapp-Prozesse eine Abschätzung für den energetischen Gültigkeitsbereich des quadratischen Bremsgesetzes von mittelschnellen Elektronen in Alkali-Metallen. Es ergibt sich die Bedingung: $E_p \gtrsim 5000$ eV. Das von Wjatskin vorgeschlagene lineare Bremsgesetz für kleinere Energien wird diskutiert.

Einleitung

Schießt man Elektronen einiger hundert oder tausend eV in ein Metall, so treten dieselben dort mit den Metallelektronen in Wechselwirkung und werden abgebremst. Es entsteht die Frage nach der Funktion $E_p = E_p(x, E_p^0)$; dabei bedeutet E_p^0 die anfängliche Primärenergie, E_p , die an der Stelle x noch vorhandene. Die fragliche Funktion entsteht dabei stets durch Integration der aus der jeweiligen Theorie sich zunächst ergebenden Differentialbeziehung²⁾

$$-\frac{dE_p}{dx} = f(E_p, a).$$

Versucht man das Problem im Einelektronenmodell des Metalls zu lösen, so geht man im allgemeinen mit Diracscher Störungstheorie an das Problem heran und hat dann (bei Beschränkung auf genügend große Primärenergien $E_p > 100$ eV) dabei das Matrixelement des Störoperators zu berechnen. Wegen der im allgemeinen natürlich nicht genügend gut bekannten speziellen Bloch-Funktionen des Problems kann das nur approximativ durchgeführt werden. Auf der verschiedenen Beurteilung dieser Näherungen beruhen offenbar die Diskrepanzen in den Ergebnissen der verschiedenen Verfasser bezüglich der Form des Bremsgesetzes.

Während so z. B. Barroody¹⁾ (1956) behauptet, ab 500 eV aufwärts gelte ein quadratisches Bremsgesetz

$$E_p^2(x) = E_p^{02} - c x,$$

kommt Wjatskin³⁾ (1955) zu dem Ergebnis, daß dasselbe erst bei Energien zwischen 2000 und 10000 eV zu gelten beginne, während man darunter (bei

¹⁾ E. M. Barroody, Physic. Rev. **101**, 1679 (1956).

²⁾ W. Brauer, Czech. Journ. Phys. **7**, 513 (1957).

³⁾ A. J. Wjatskin, Zurn. techn. Fiz. **25**, 1155 (1955).

einigen 100 eV) mit einem linearen Bremsgesetz

$$E_p(x) = E_p^0 - c x$$

zu rechnen habe. Bei dieser Abschätzung stützt er sich unter anderen auf die Beziehung

$$\bar{e} = \frac{\hbar^2}{2m} (2\pi\delta)^2 \approx 20 \text{ eV}$$

für den mittleren Energiegewinn eines Sekundärelektrons. Nach Baroody¹⁾ gilt jedoch:

$$\bar{e} \approx 4,5 \text{ eV}.$$

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, durch eine genauere Abschätzung der verwendeten Näherungen eine bessere Übersicht zu bekommen über den energetischen Gültigkeitsbereich der eventuell auftretenden Bremsgesetze.

Das Integral I_0

Wir gehen aus von dem Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit eines 2-Elektronensystems mit Coulombscher Wechselwirkung $\frac{e^2}{|\mathfrak{R} - \mathfrak{r}|}$ aus dem Zustand $\psi_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) \psi_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{r})$ in den Zustand $\psi_{\mathfrak{R}'}(\mathfrak{R}) \psi_{\mathfrak{r}'}(\mathfrak{r})$ in der von Dekker und van der Ziel angegebenen Form⁴⁾⁵⁾:

$$P_{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}(\mathfrak{t}', \mathfrak{R}') d\Omega' = \frac{4e^4 m^2}{\hbar^4} \frac{K'}{K} \frac{1}{q^4} |I|^2 d\Omega', \quad \vec{q} = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}'. \quad (1)$$

Dabei bedeutet $d\Omega'$ das Raumwinkelement, in das \mathfrak{R}' zeigt; der Betrag von \mathfrak{R}' ist durch den Energiesatz mit \mathfrak{t}' und dem Anfangszustand ($\mathfrak{t}, \mathfrak{R}$) gekoppelt:

$$E_{\mathfrak{t}', \mathfrak{R}'} = E_{\mathfrak{t}, \mathfrak{R}}.$$

Für $\psi_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ wurde bei der Ableitung von (1)

$$\psi_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) = e^{i(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})}$$

gesetzt, was der Vernachlässigung des Gittereinflusses auf das relativ schnelle Primärelektron entspricht. Dementsprechend kann man schreiben:

$$E_{\mathfrak{t}, \mathfrak{R}} = E(\mathfrak{t}) + \frac{\hbar^2}{2m} K^2 = E(\mathfrak{t}) + E_p^0.$$

Die Größe I schließlich hat die Bedeutung:

$$I = \int \psi_{\mathfrak{R}'}^* \psi_{\mathfrak{r}'} e^{i(\vec{q}, \mathfrak{r})} d^3 \mathfrak{r}, \quad (2)$$

wobei sich das Integral über das verwendete Normierungsvolumen von 1 cm³ erstreckt.

Interessiert man sich nur für den reinen Volumeneffekt der Sekundär-emission, so hat man:

$$\psi_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{r}) = u_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{r}) e^{i(\mathfrak{t}, \mathfrak{r})}, \quad (3)$$

d. h. eine Blochsche Welle mit \mathfrak{t} als nichtreduziertem Ausbreitungsvektor. Nach Baroody¹⁾ kann man dann für I schreiben:

$$I = I_0 \begin{cases} N & \text{für } \mathfrak{t}' = \mathfrak{t} + \vec{q} + 2\pi\delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4)$$

¹⁾ A. J. Dekker u. A. van der Ziel, Physic. Rev. 86, 755 (1952).

⁵⁾ O. Hachenberg u. W. Brauer, Fortschr. Phys. 1, 439 (1954).

Dabei ist I_0 obiges Integral über eine Elementarzelle des Gitters erstreckt, N die Zahl dieser Zellen in 1 cm^3 und $\vec{\mathfrak{H}}$ ein Vektor im reziproken Gitter des betreffenden Metalls. Die Prozesse $\vec{\mathfrak{H}} \neq 0$ entsprechen Übergängen der Metallelektronen in höhere Brillouin-Zonen.

Zur Berechnung der betrachteten Übergangswahrscheinlichkeit kommt es danach lediglich noch auf die Bestimmung des Integrals I_0 an. Es erscheint zweckmäßig, I_0 zunächst ohne irgendwelche Vernachlässigungen umzuformen, ehe man für die Funktion $u_t(\mathbf{r})$ mehr oder weniger spezielle Formeln einsetzt. Zu diesem Zweck verwenden wir folgenden Ausdruck für I_0 :¹⁾

$$I_0 = \frac{\hbar^2 \vec{q}}{AE_{t',t}} \int \vec{j}_{t',t}(\mathbf{r}) e^{i\vec{q} \cdot \mathbf{r}} d^3 r; AE_{t',t} = E(t') - E(t). \quad (5)$$

Hierbei bedeutet $\vec{j}_{t',t}$ die Übergangsstromdichte:

$$\vec{j}_{t',t} = \frac{\hbar}{2m} (\psi_{t'}^* \operatorname{grad} \psi_t - \psi_t \operatorname{grad} \psi_{t'}^*).$$

Setzt man dieselbe in (5) ein und beachtet (3) und den Impulssatz (4), so folgt sofort:

$$I_0 = \frac{\hbar^2 \vec{q}}{2m AE_{t',t}} (t + t') \int e^{i\vec{q} \cdot \mathbf{r}} \psi_{t'}^* \psi_t d^3 r + \frac{\hbar^2 \vec{q}}{2m i AE_{t',t}} \int e^{-i(2\pi \vec{\mathfrak{H}} \cdot \mathbf{r})} \\ \cdot \{ u_{t'}^* \operatorname{grad} u_t - u_t \operatorname{grad} u_{t'}^* \} d^3 r. \quad (6)$$

Zur weiteren Umformung des zweiten Integrals beachten wir, daß auf Grund der Gitter-Periodizität von $u_{t'}^* u_t e^{-i(2\pi \vec{\mathfrak{H}} \cdot \mathbf{r})}$ gilt:

$$\int u_{t'}^* u_t e^{-i(2\pi \vec{\mathfrak{H}} \cdot \mathbf{r})} d\vec{r} = 0,$$

wobei die Integration über die Oberfläche einer Elementarzelle geht. Nach dem Gaußschen Satz

$$\int q d\vec{r} = \int \operatorname{grad} q d\tau$$

folgt daraus:

$$\begin{aligned} - \int u_t \operatorname{grad} u_{t'}^* e^{-i(2\pi \vec{\mathfrak{H}} \cdot \mathbf{r})} d^3 r &= \\ \int u_{t'}^* \operatorname{grad} u_t e^{-i(2\pi \vec{\mathfrak{H}} \cdot \mathbf{r})} d^3 r - i 2\pi \vec{\mathfrak{H}} \int u_{t'}^* u_t e^{-i(2\pi \vec{\mathfrak{H}} \cdot \mathbf{r})} d^3 r & \\ = \int u_{t'}^* \operatorname{grad} u_t e^{-i(2\pi \vec{\mathfrak{H}} \cdot \mathbf{r})} d^3 r - i 2\pi \vec{\mathfrak{H}} \int \psi_{t'}^* \psi_t e^{i\vec{q} \cdot \mathbf{r}} d^3 r. & \end{aligned}$$

Setzen wir das unter Beachtung von (2) in (6) ein, so ergibt sich:

$$I_0 = \frac{\hbar^2 \vec{q}}{2m AE_{t',t}} (t + t') I_0 + \frac{\hbar^2 \vec{q}}{m i AE_{t',t}} \int u_{t'}^* \operatorname{grad} u_t e^{-i(2\pi \vec{\mathfrak{H}} \cdot \mathbf{r})} d^3 r \\ - \frac{\hbar^2 \vec{q}}{2m AE_{t',t}} 2\pi \vec{\mathfrak{H}} I_0.$$

Mit der Abkürzung

$$\int u_{t'}^* \operatorname{grad} u_t e^{-i(2\pi \vec{\mathfrak{H}} \cdot \mathbf{r})} d^3 r = \frac{1}{N} \mathcal{A}(\vec{\mathfrak{H}}; t', t) \quad (7)$$

wird so:

$$I_0 = \frac{\hbar^2}{N m i} \cdot \frac{(\mathfrak{A}(\mathfrak{H}; t', t), \vec{q})}{\Delta E_{t', t} - \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{q}, \vec{q} + 2t)} . \quad (8)$$

Dieser Ausdruck für I_0 ist im Sinne der Störungsrechnung noch vollkommen streng und hat Gültigkeit für alle \vec{q} .

Taylorische Entwicklung von I_0

Wir fassen I_0 als Funktion von \vec{q} auf und entwickeln es in einer Taylorreihe um $\vec{q} = 0$:⁶⁾

$$\begin{aligned} I_0(\vec{q}) &= I_0(0) + \sum_i \frac{\partial I_0}{\partial q_i} \Big|_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 I_0}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0 q_i q_j + \dots \\ &= I_0^{(0)} + I_0^{(1)} + I_0^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Man erkennt aus (8) sofort, daß die in (9) auftretenden Summanden nur für $\mathfrak{H} \neq 0$ ohne weiteres definierte Werte haben, während sie für $\mathfrak{H} = 0$ unbestimmt gleich $\frac{0}{0}$ sind.

Wir beschränken unsere weitere Betrachtung auf erstere Prozesse. Dann gilt:

$$I_0^{(0)} = 0 \quad (\text{Marshall 1952})^7), \quad (10)$$

also

$$I_0(\vec{q}) = I_0^{(1)} + I_0^{(2)} + \dots \quad (11)$$

Bei der Berechnung von $I_0^{(1)}$ liefert die Ausführung der notwendigen Differentiationen ohne weiteres:

$$I_0^{(1)} = \frac{\hbar^2}{N m i} \frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{A}(t + 2\pi\mathfrak{H}, t), \vec{q}) \quad (\text{Baroody 1956})^1). \quad (12)$$

Dabei bedeutet $\varepsilon = \Delta E_{t+2\pi\mathfrak{H}, t} = E(t + 2\pi\mathfrak{H}) - E(t)$.

Aus Formel (12) ergibt sich¹⁾ ein Bremsgesetz der Form:

$$-\frac{dE_p}{dx} \sim \frac{1}{E_p} \ln \left(\frac{2E_p}{\varepsilon} \right). \quad (13)$$

Die Gültigkeit dieses auf (12) beruhenden Bremsgesetzes für Prozesse $\mathfrak{H} \neq 0$ hängt nun offenbar an der Voraussetzung: Alle $I_0^{(n)}$ ($n > 1$) tragen zum Integral I_0 gegenüber $I_0^{(1)}$ vernachlässigbar wenig bei. Über die Relation¹⁾

$$q_{\min} = \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon}{(2E_p)^{1/2}} \quad (14)$$

liefert diese Bedingung dann ein Kriterium für die Primärenergien E_p , bei denen das Whiddingtonsche Gesetz (13) gilt. Zur Ableitung dieses Kriteriums haben wir zunächst $I_0^{(2)}$ zu berechnen. Das ergibt:

$$\begin{aligned} I_0^{(2)} &= \frac{\hbar^2}{N m i} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i,j} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_i}{\partial t'_j} + \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial t'_i} \right) - \left(\mathfrak{A}_i \frac{\partial E(t')}{\partial t'_j} + \mathfrak{A}_j \frac{\partial E(t')}{\partial t'_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hbar^2}{m} (t_i \mathfrak{A}_j + t_j \mathfrak{A}_i) \right\} q_i q_j. \end{aligned} \quad (15)$$

⁶⁾ Wegen $\vec{q}_{\min} \neq 0$ (14) entspricht dem Wert $\vec{q} = 0$ selbstverständlich kein reeller physikalischer Prozeß.

⁷⁾ T. F. Marshall, Phys. Rev. 88, 416 (1952).

Während dieser Ausdruck noch streng gültig ist, sind wir nun, um weiter zu kommen, gezwungen, Näherungsannahmen zu machen.

Die Näherung der quasifreien Elektronen

Nach Peierls ergeben sich mittels Schrödingerscher Störungsrechnung erster Ordnung für Eigenfunktionen und Eigenwerte der Metallelektronen folgende Ausdrücke⁸⁾:

$$\psi_{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \left\{ 1 - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \sum_{\delta' \neq 0} \frac{v_{\delta'}}{(\mathbf{k}, \delta') + \pi\hbar^2} e^{i(2\pi\delta', \mathbf{r})} \right\}; \quad E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}^2 + v_0. \quad (16)$$

Sie beschreiben bekanntlich die Verhältnisse in den Alkalimetallen (K, Na, Rb) recht gut, auf welche wir uns künftighin also ausdrücklich beschränken wollen.

Wir berechnen jetzt: $\mathfrak{A}(\mathbf{k} + 2\pi\delta, \mathbf{k})$ und $\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial k'_j}$ mit der Wellenfunktion (16). Zunächst ergibt sich:

$$\text{grad } u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = -i \frac{m}{\hbar^2} \sum_{\delta' \neq 0} \delta' \frac{v_{\delta'}}{(\mathbf{k}, \delta') + \pi\hbar^2} e^{i(2\pi\delta', \mathbf{r})} \quad (17)$$

$$u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) = 1 - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \sum_{\delta'' \neq 0} \frac{v_{\delta''}^*}{(\mathbf{k}', \delta'') + \pi\hbar^2} e^{-i(2\pi\delta'', \mathbf{r})}. \quad (18)$$

In (7) eingesetzt erhalten wir:

$$\mathfrak{A}(\mathbf{k} + 2\pi\delta, \mathbf{k}) = -\frac{i m}{\hbar^2} \sum_{\delta' \neq 0} \delta' \frac{v_{\delta'}}{(\mathbf{k}, \delta') + \pi\hbar^2} \int_{1\text{ cm}^3} e^{i2\pi(\delta' - \delta, \mathbf{r})} d^3 r = V(\mathbf{k}, \delta) \cdot \delta \quad (19)$$

mit

$$V(\mathbf{k}, \delta) = -\frac{i m}{\hbar^2} \frac{v_{\delta}}{(\mathbf{k}, \delta) + \pi\hbar^2}.$$

Dabei sind in v_{δ} quadratische Terme als Konsequenz der Verwendung des quasifreien Elektronenmodells gegenüber in v_{δ} linearen vernachlässigt worden.

Zur Berechnung von $\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial k'_j}$ beachten wir, daß aus (18) hervorgeht:

$$\frac{\partial u_{\mathbf{k}}^*}{\partial k'_j} = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \sum_{\delta'' \neq 0} v_{\delta''}^* e^{-i(2\pi\delta'', \mathbf{r})} \frac{\delta_j''}{[(\mathbf{k}', \delta'') + \pi\hbar^2]^2}.$$

Setzt man das und (17) in

$$\frac{\partial \mathfrak{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k})}{\partial k'_j} = \int \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^*}{\partial k'_j} \text{grad } u_{\mathbf{k}} e^{-i(2\pi\delta, \mathbf{r})} d^3 r$$

ein, so sieht man, daß nur in v_{δ} quadratische Terme auftreten, die wir in der verwendeten Näherung gegen die in v_{δ} linearen Terme in (15) vernachlässigen; wir setzen also:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial k'_j} = 0. \quad (20)$$

⁸⁾ A. H. Wilson, Theory of Metals, S. 35 (1953).

⁹⁾ Natürlich hätte man Formel (19) auch direkt aus der allgemeinen Fourier-Entwicklung für $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\delta'} a_{\delta'}(\mathbf{k}) e^{i2\pi(\delta', \mathbf{r})}$ bekommen können:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= 2\pi i \sum_{\delta' \delta''} a_{\delta''}^*(\mathbf{k}') a_{\delta'}(\mathbf{k}) \delta'' \int e^{i2\pi(\delta' - \delta'' - \delta, \mathbf{r})} d^3 r \\ &= 2\pi i \sum_{\delta'} a_{\delta'}^*(\mathbf{k}') a_{\delta + \delta'}(\mathbf{k}) (\delta + \delta''). \end{aligned}$$

Nimmt man jetzt an: $a_0 \approx 1$ und vernachlässigt in $a_{\delta'} (\delta' \neq 0)$ quadratische Terme, dann bekommt man:

$$\mathfrak{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 2\pi i a_0(\mathbf{k}) \delta = V(\mathbf{k}, \delta) \delta,$$

Mit der aus (16) sich ergebenden Relation:

$$\frac{\partial E(\mathbf{t}')}{\partial t'_j} \Big|_0 = \frac{\hbar^2}{m} (\mathbf{t}' + 2\pi \mathbf{\tilde{H}}) \quad (21)$$

erhalten wir also schließlich für (15):

$$I_0^{(2)} = -\frac{\hbar^2}{N m i} \frac{1}{2} \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{l,j} [\mathbf{A}_l \cdot \mathbf{\tilde{H}}_j + \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{\tilde{H}}_l] q_l q_j.$$

Mit (19) wird daraus:

$$I_0^{(2)} = -\frac{\hbar^2}{N m i} \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{\varepsilon^2} V(\mathbf{t}, \mathbf{\tilde{H}}) \sum_{l,j} \mathbf{\tilde{H}}_l \cdot \mathbf{\tilde{H}}_j q_l q_j.$$

Diese zweite und alle höheren Näherungen ergeben sich natürlich auch direkt aus (8), wenn man sogleich (16) verwendet bzw. die daraus folgenden Beziehungen (19), (20) und (21). Es gilt ja nach (16):

$$\Delta E_{V,t} - \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{q}, \vec{q} + 2\mathbf{t}) = \varepsilon + \frac{2\pi\hbar^2}{m} (\mathbf{\tilde{H}}, \vec{q}).$$

Wir haben also:

$$I_0 = \frac{\hbar^2}{N m i} V(\mathbf{t}, \mathbf{\tilde{H}}) \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{\tilde{H}}, \vec{q}) \frac{1}{1 + \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{\tilde{H}}, \vec{q})}.$$

Für $\frac{2\pi\hbar^2}{m} |\langle \mathbf{\tilde{H}}, \vec{q} \rangle| < \varepsilon$ können wir das auch schreiben:

$$\frac{\hbar^2}{N m i} V(\mathbf{t}, \mathbf{\tilde{H}}) \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{\tilde{H}}, \vec{q}) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^n \frac{1}{\varepsilon^n} (\mathbf{\tilde{H}}, \vec{q})^n$$

oder:

$$I_0 = \sum_{n=1}^{\infty} I_0^{(n)} = \frac{\hbar^2}{N m i} V(\mathbf{t}, \mathbf{\tilde{H}}) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^{n-1} \frac{1}{\varepsilon^n} (\mathbf{\tilde{H}}, \vec{q})^n. \quad (22)$$

Wir bemerken ausdrücklich, daß sich nur der erste Summenterm (Formel (12)) ohne Voraussetzungen über die spezielle Natur der Wellenfunktionen ergibt. Alle Terme $n \geq 2$ beruhen auf dem quasifreien Elektronenmodell.

Das Energiekriterium

Wir betrachten jetzt das Verhältnis der Beiträge zweier aufeinanderfolgender Summenglieder für die Übergangswahrscheinlichkeit (1):

$$P \sim |I_0|^2 = |I_0^{(1)} + I_0^{(2)} + \dots|^2.$$

Offenbar gilt:

$$|I_0^{(1)} + I_0^{(2)}| = |I_0^{(1)}| - |I_0^{(2)}|,$$

also:

$$P \sim (|I_0^{(1)}| - |I_0^{(2)}|)^2 = |I_0^{(1)}|^2 - 2|I_0^{(1)}||I_0^{(2)}| + |I_0^{(2)}|^2.$$

Die betrachteten Beiträge verhalten sich also wie $|I_0^{(1)}| : 2|I_0^{(2)}|$. Wir können deshalb mit der Gültigkeit der in \vec{q} linearen Näherung $I_0^{(1)}$ rechnen, wenn die folgende Beziehung erfüllt ist:

$$2|I_0^{(2)}| \ll |I_0^{(1)}|$$

oder:

$$4 \frac{\hbar^2}{m} |\langle \pi \mathbf{\tilde{H}}, \vec{q} \rangle| \ll \varepsilon. \quad (23)$$

Diese Relation muß mindestens für den Fall $\vec{q} = \vec{q}_{\min}$ gelten und speziell auch für $\vec{q} \parallel \hat{\mathfrak{H}}$. Mit (14) bekommen wir also:

$$4 \left(\frac{\hbar^2}{m} \right)^{1/2} \pi H \frac{1}{(2 E_p)^{1/2}} \ll 1.$$

Das bedeutet:

$$4 \left(\frac{\hbar^2}{m} \right)^{1/2} \pi H \frac{1}{(2 E_p)^{1/2}} \lesssim \frac{1}{10}.$$

Daraus ergibt sich folgendes notwendige Kriterium für das Überwiegen des Gliedes $n = 1$:

$$E_p \gtrsim 5000 \text{ eV}.$$

Dabei wurde $\pi H = 1 \text{ \AA}^{-1}$ gesetzt.

Bei Gültigkeit von (23) ist auch die für (22) benötigte Ungleichung erfüllt. Schließlich merken wir noch an, daß der für q_{\min} verwendete Näherungsausdruck (14) mit Sicherheit oberhalb $E_p \approx 2500 \text{ eV}$ gilt, wie die Entwicklung des strengen Ausdrucks für q_{\min} nach $\frac{1}{K}$ zeigt.

Zum Kriterium (23) gelangt man übrigens auf einem kürzeren aber weniger instruktiven Wege, indem man direkt in die Form (2) des Integrals I die Fourier-Entwicklung der Blochfunktionen einsetzt:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\hat{\mathfrak{H}}' \hat{\mathfrak{H}}} a_{\hat{\mathfrak{H}}'}^*(\mathbf{f}') a_{\hat{\mathfrak{H}}}(\mathbf{f}) \int_{1 \text{ cm}^3} e^{i(-\mathbf{f}' + \vec{q} + 2\pi(\hat{\mathfrak{H}}' - \hat{\mathfrak{H}}'), \mathbf{r})} d^3 r \\ &= \sum_{\hat{\mathfrak{H}}' \hat{\mathfrak{H}}} a_{\hat{\mathfrak{H}}'}^*(\mathbf{f}') a_{\hat{\mathfrak{H}}'}(\mathbf{f}) \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{f}' = \mathbf{f} + \vec{q} + 2\pi(\hat{\mathfrak{H}}' - \hat{\mathfrak{H}}') \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Für fest vorgegebenen Anfangs- und Endzustand kann höchstens ein $\hat{\mathfrak{H}} = \hat{\mathfrak{H}}' - \hat{\mathfrak{H}}''$ den Erhaltungssatz erfüllen, wir bekommen also:

$$I = \sum_{\hat{\mathfrak{H}}} a_{\hat{\mathfrak{H}}''}^*(\mathbf{f}') a_{\hat{\mathfrak{H}}'' + \hat{\mathfrak{H}}}(\mathbf{f}). \quad (24)$$

Zur Untersuchung der \vec{q} -Abhängigkeit dieses Ausdrückes entwickelt man wieder:

$$a_{\hat{\mathfrak{H}}''}^*(\mathbf{f}') = a_{\hat{\mathfrak{H}}''}^*(\mathbf{f} + 2\pi\hat{\mathfrak{H}}) + \sum_l \frac{\partial a_{\hat{\mathfrak{H}}''}^*}{\partial \mathbf{f}_l} \Big|_0 q_l + \frac{1}{2} \sum_{l,j} \frac{\partial^2 a_{\hat{\mathfrak{H}}''}^*}{\partial \mathbf{f}_l \partial \mathbf{f}_j} \Big|_0 q_l q_j + \dots \quad (25)$$

Benutzt man wie oben die quasifreie Elektronennäherung, so ist

$$a_{\hat{\mathfrak{H}}''}^*(\mathbf{f}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{v_{\hat{\mathfrak{H}}''}^*}{(\mathbf{f}', \hat{\mathfrak{H}}) + \pi\hat{\mathfrak{H}}'^2}, \quad (\hat{\mathfrak{H}}'' \neq 0); \quad a_0^* \approx 1.$$

Setzt man das in (24) und (25) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\hat{\mathfrak{H}}'' \neq 0} a_{\hat{\mathfrak{H}}'' + \hat{\mathfrak{H}}}(\mathbf{f}) \left\{ a_{\hat{\mathfrak{H}}''}^*(\mathbf{f} + 2\pi\hat{\mathfrak{H}}) + \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{v_{\hat{\mathfrak{H}}''}^*}{[(\mathbf{f} + 2\pi\hat{\mathfrak{H}}, \hat{\mathfrak{H}}'') + \pi\hat{\mathfrak{H}}'^2]^2} \sum_l \hat{\mathfrak{H}}_l'' q_l \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{2v_{\hat{\mathfrak{H}}''}^*}{[(\mathbf{f} + 2\pi\hat{\mathfrak{H}}, \hat{\mathfrak{H}}'') + \pi\hat{\mathfrak{H}}'^2]^3} \sum_{l,j} \hat{\mathfrak{H}}_l'' \hat{\mathfrak{H}}_j'' q_l q_j + \dots \right\} \\ &\quad + a_{\hat{\mathfrak{H}}}(\mathbf{f}) a_0^*(\mathbf{f} + 2\pi\hat{\mathfrak{H}}). \end{aligned} \quad (26)$$

Wenn man jetzt die Orthogonalität der Blochfunktionen $\psi_t, \psi_{t+2\pi\delta}$ beachtet⁶⁾ (die Formel (8) automatisch berücksichtigt), dann wird aus (26):

$$I = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \sum_{\delta'' \neq 0} a_{\delta''+\delta}(t) \frac{v_{\delta}^{*\delta''}}{[(t+2\pi\delta, \delta'') + \pi\delta'^2]^2} \cdot \left\{ (\delta'', \vec{q}) - \frac{1}{[(t+2\pi\delta, \delta'') + \pi\delta'^2]} (\delta'', \vec{q})^2 + \dots \right\}.$$

Vernachlässigt man quadratische Terme gegenüber solchen erster Ordnung in den Entwicklungskoeffizienten von $u_t(t)$ und $V(r)$, so verbleibt:

$$I = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{v_{\delta}}{[-(t+2\pi\delta, \delta) + \pi\delta^2]^2} \left\{ -(\delta, \vec{q}) - \frac{1}{[-(t+2\pi\delta, \delta) + \pi\delta^2]} \right. \\ \left. \cdot (\delta, \vec{q})^2 + \dots \right\} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{\varepsilon} v_{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^{n-1} \frac{1}{\varepsilon^n} (-\delta, \vec{q})^n,$$

d. h. wieder die Formel (22), also auch das aus ihr folgende Kriterium (23). Eine entsprechende Betrachtung wurde bereits von Wjatskin³⁾ durchgeführt, der bis auf den Faktor 2 ebenfalls zu (23) gelangte. Seine Abschätzung für E_p stimmt dann mit unserer bis auf den Faktor 4 überein. Wegen $q_{\min} \sim \varepsilon$ geht in das Kriterium für E_p die Größe ε tatsächlich gar nicht ein, so daß eine zu grobe Betrachtung Wjatskins bezüglich ε bei der Bestimmung des kritischen E_p -Wertes keine Folgen hat.

Diskussion

Wir können das Ergebnis unserer Überlegungen, Ungleichung (23), folgendermaßen formulieren: Das erste Entwicklungsglied in (22), das bekanntlich zum quadratischen Bremsgesetz führt¹⁾, überwiegt alle nachfolgenden Summenterme jedenfalls bei $q \approx q_{\min}$, wenn die Primärenergie E_p etwa 5000 eV übersteigt. Die verwendeten Wellenfunktionen beschränken diese Aussage zunächst auf die genannten Alkali-Metalle, jedoch wird man bei den meisten übrigen Metallen kaum eine sehr viel andere Größenordnung anzunehmen haben. Bei wesentlich kleineren E_p -Werten werden die einzelnen Entwicklungsglieder sich nicht mehr um Größenordnungen unterscheiden, so daß die hier angestellte Betrachtung dann nicht auf ein übersichtliches Bremsgesetz führt. Es erscheint danach, daß Barroodys¹⁾ Abschätzung für den energetischen Gültigkeitsbereich des quadratischen Bremsgesetzes ($E_p \gtrsim 500$ eV) zu roh ist. (Er entwickelte nur den Exponentialfaktor in (2) in eine Taylor-Reihe.) Dagegen ist, bis auf den erwähnten Faktor 4 und die Behandlung der Größe $\varepsilon(t, \delta)$ gegen die Wjatskinsche Abschätzung der kritischen Primärenergie nichts einzuwenden.

Das gleiche gilt nicht für die andere Behauptung Wjatskins³⁾, für Energien unterhalb der Gültigkeitsgrenze des quadratischen Gesetzes gelte ein $-\frac{dE_p}{dx} = \text{const}$ entsprechendes lineares Abbremsgesetz. Dieser Schluß beruht im wesentlichen auf der Nichtberücksichtigung der t -Abhängigkeit der Fourierkoeffizienten $a_{\delta}(t)$ in der Blochschen Funktion, die darin zum Ausdruck kommt, daß Wjatskin die

$$\sum_{\delta'} a_{\delta''}^*(t') a_{\delta'}(t)$$

vor das Integral (10) in¹⁰⁾ zieht, was wegen $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + 2\pi \hat{\mathbf{h}} + \vec{q}$ einer Vernachlässigung von \vec{q} gleichkommt. Diese Approximation (bereits 1939 von Wooldridge¹¹⁾ durchgeführt) vernachlässigt aber die Orthogonalität der Blochschen Funktionen verschiedener Energien (Formel (10))⁶⁾. Das sich so bei Wjatskin (und Wooldridge) ergebende lineare Bremsgesetz für Prozesse $\hat{\mathbf{h}} \neq 0$ ist also keineswegs eine Folge der exakten Aufsummation der Reihe (22), sondern gerade die Folge der Nichtbeachtung von (10).

Zusammenfassend läßt sich sagen: Vom Standpunkt der Theorie ergibt sich mit einiger Sicherheit von einigen 1000 eV an für Prozesse $\hat{\mathbf{h}} \neq 0$ ein quadratisches Bremsgesetz, während sich etwa für ein lineares bisher kein Argument ins Feld führen läßt. Bemerkenswert ist daneben, daß auch sämtliche, die kollektive Wechselwirkung der Metallelektronen berücksichtigenden Theorien zu quadratischen Bremsgesetzen gelangen, wobei die Grenzenergien bei etwa 100 eV liegen.

Direkte experimentelle Untersuchungen neuerer Datums über die Abbremzung mittelschneller Elektronen in Metallen liegen wohl nicht vor. Andererseits muß man bei Schlüssen von Ausbeutekurven der Sekundäremission her auf das Bremsgesetz der Primärelektronen sehr vorsichtig sein, da ersterer Vorgang sehr komplex ist und bei ihm noch manche heute nicht genügend beherrschten Prozesse eine Rolle spielen. Davon unabhängig aber kann man wohl immerhin sagen, daß ein bis zu einigen 1000 eV gültiges lineares Bremsgesetz schwerlich die bei wenigen 100 eV auftretenden Ausbeutemaxima der Metalle verständlich machen könnte²⁾.

Herrn Dipl.-Phys. Streitwolf danke ich für wertvolle Diskussionen.

¹⁰⁾ A. J. Wjatskin, Zurn. ekp. teor. Fiz. **20**, 557 (1950).

¹¹⁾ D. E. Wooldridge, Physic. Rev. **56**, 562 (1939).

Berlin, Institut für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 5. April 1957.

Über periodische nichtsinguläre Lösungen in der allgemeinen Relativitätstheorie

Von A. Papapetrou

Inhaltsübersicht

Die Frage nach der Existenz von nichtsingulären Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, die von der Zeit periodisch abhängen, wird mit Hilfe eines Näherungsverfahrens für schwache Gravitationsfelder diskutiert. Insbesondere wird der Fall betrachtet, daß die Lösung ein im ganzen Raum schwaches Gravitationsfeld darstellt. Die Diskussion ergibt, daß es keine solchen periodischen nichtsingulären Lösungen gibt, die im Unendlichen die Grenzbedingung $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ erfüllen.

§ 1. Einleitung

Von Einstein wurde die Frage aufgeworfen, ob es in der allgemeinen Relativitätstheorie nichtsinguläre Lösungen der Feldgleichungen gibt. Es sind dabei Lösungen der Gleichungen

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1,1)$$

gemeint, die diese Gleichungen überall erfüllen und darüber hinaus die gewöhnlichen Grenzbedingungen im Unendlichen,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (1,2)$$

befriedigen. Nach Einstein sollten solche Lösungen eine theoretisch befriedigende Darstellung der Materie ergeben, im Gegensatz zu der phänomenologischen Beschreibung mit Hilfe des Materietensors $T_{\mu\nu}$.

Einen Spezialfall dieses Problems hat man schon diskutiert und dafür eine negative Antwort gefunden. Es ist dies der Fall der zeitunabhängigen (statischen oder stationären) Lösungen. Wie zunächst Einstein¹⁾ und Einstein und Pauli²⁾ zeigten, würde eine solche Lösung — falls sie existierte — ein physikalisches System von verschwindender Energie bzw. Masse darstellen. Lichnerowicz³⁾ konnte dann beweisen, daß eine zeitunabhängige Metrik $g_{\mu\nu}$, die die Gln. (1,1) überall erfüllt und die Grenzbedingung (1,2) befriedigt, zu einem verschwindenden Krümmungstensor führt: Die einzige zeitunabhängige, nichtsinguläre Lösung der Feldgleichungen ist der Minkowskische Raum der speziellen Relativitätstheorie.

¹⁾ A. Einstein, Revista (Univ. Nac. de Tucuman) A 2, 11 (1941).

²⁾ A. Einstein u. W. Pauli, Annals of Mathem. 44, 131 (1943).

³⁾ A. Lichnerowicz, C. R. Acad. Sci. Paris 222, 432 (1946); Théories relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme (Masson & Cie, Paris 1955).

In der vorliegenden Arbeit wird ein allgemeinerer Fall betrachtet: Es wird angenommen, daß in dem verwendeten Koordinatensystem die Größen $g_{\mu\nu}$ periodische Funktionen der Zeit sind. Dieser Fall ist der physikalisch am meisten interessierende, da er allein für die Beschreibung von beständigen Systemen bzw. Teilchen geeignet ist⁴⁾. Wir werden bei unserer Diskussion ein Näherungsverfahren für schwache Felder verwenden, was durch die Grenzbedingung (1,2) nahegelegt wird: In genügender Entfernung von einem „zentralen“ Bereich wird das Feld notwendig schwach sein. Am einfachsten läßt sich die Frage nach der Existenz eines im ganzen Raum schwachen, nicht-singulären Feldes $g_{\mu\nu}$ beantworten. In der folgenden Diskussion werden wir uns nur mit dieser Frage beschäftigen. Der allgemeinere Fall eines nicht überall schwachen Feldes wird in einer anderen Arbeit behandelt.

§ 2. Die Feldgleichungen, allgemeine Formeln

Wir wollen im folgenden die Wahlfreiheit des Koordinatensystems durch die de Dondersche Koordinatenbedingung einschränken. Dementsprechend wählen wir als Feldgrößen die Dichtekomponenten $g^{\mu\nu}$. Es ist dann zweckmäßig auch die zu $g^{\mu\nu}$ reziproke Matrix zu verwenden und daher auch für sie ein besonderes Symbol einzuführen. Wir setzen

$$g^{\mu\alpha} \mathfrak{G}_{\nu\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (2,1)$$

Es ist also

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} = \frac{g_{\mu\nu}}{-g}.$$

Eine einfache Rechnung führt dann zu folgenden, von den von Fock abgeleiteten⁵⁾ wenig abweichenden Formeln:

$$g^{\mu\alpha} \left(\mathfrak{R}_{\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\nu} \mathfrak{R} \right) = I^{\mu\nu} + II^{\mu\nu}; \quad (2,2)$$

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu} = & -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\alpha}^{\mu\alpha} g_{\alpha}^{\nu\beta} + \frac{1}{2} \mathfrak{G}_{\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} g_{\alpha\sigma}^{\mu\beta} \\ & - \frac{1}{2} \mathfrak{G}_{\alpha\sigma} g_{\alpha}^{\beta\sigma} \left(g^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta}^{\sigma\nu} + g^{\nu\alpha} g_{\alpha\beta}^{\sigma\mu} \right) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \left(\mathfrak{G}_{\alpha\beta} g_{\alpha}^{\sigma\alpha} g_{\beta}^{\beta\sigma} + \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \mathfrak{G}_{\alpha\beta} g_{\alpha}^{\beta\sigma} \right) \\ & + \left(\frac{1}{16} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{8} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right) \mathfrak{G}_{\alpha\sigma} g_{\alpha}^{\sigma\alpha} \mathfrak{G}_{\lambda\beta} g_{\lambda}^{\lambda\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\sigma} \mathfrak{G}_{\alpha\beta} g_{\beta}^{\alpha\sigma}, \end{aligned} \quad (2,3)$$

$$II^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta}^{\nu\beta} + \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} g_{\alpha\beta}^{\mu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha}^{\mu\nu} g_{\beta}^{\alpha\beta}. \quad (2,4)$$

In $II^{\mu\nu}$ sind diejenigen Terme zusammengefaßt, die bei Erfüllung der de Donderschen Koordinatenbedingung verschwinden, so daß dann die Feldgleichungen sich auf $I^{\mu\nu} = 0$ reduzieren. Man beachte, daß $I^{\mu\nu}$ und $II^{\mu\nu}$ keinen Tensorcharakter (gegenüber allgemeinen Koordinatentransformationen) besitzen.

Führen wir in die Identität

$$\begin{aligned} \left[g^{\mu\alpha} \left(\mathfrak{R}_{\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\nu} \mathfrak{R} \right) \right]_{;\nu} &= \left[g^{\mu\alpha} \left(\mathfrak{R}_{\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\nu} \mathfrak{R} \right) \right]_{;\nu} \\ &+ \left(\Gamma_{\beta\nu}^{\mu} g^{\alpha\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\beta} g^{\mu\alpha} \right) \left(\mathfrak{R}_{\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\nu} \mathfrak{R} \right) = 0 \end{aligned}$$

⁴⁾ In ihm ist auch der schon untersuchte Fall des zeitunabhängigen $g_{\mu\nu}$ enthalten.
⁵⁾ V. A. Fock, Journ. Phys. USSR, 1, 81 (1939).

die Zerlegung (2,2) ein, so folgt

$$I_{,\nu}^{\mu r} + \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} I^{\beta r} - \Gamma_{\beta}^{\mu} I^{\mu r} = - (II_{,\nu}^{\mu r} + \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} II^{\beta r} - \Gamma_{\beta}^{\mu} III^{\mu r}).$$

Führt man in die rechte Seite dieser Beziehung den Ausdruck (2,4) ein, so findet man für $I^{\mu r}$ nach kurzer Rechnung die Identität

$$\left. \begin{aligned} I_{,\nu}^{\mu r} + \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} I^{\beta r} - \Gamma_{\beta}^{\mu} I^{\mu r} &= - \frac{1}{2} g^{r\alpha} g_{,\nu\alpha\beta}^{\mu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \mathfrak{G}_{\beta\nu} g_{,\alpha}^{\rho\sigma} g_{,\sigma}^{\beta r} \\ &+ \frac{1}{2} g^{r\alpha} \mathfrak{G}_{\beta\nu} g_{,\nu}^{\mu\theta} g_{,\alpha\sigma}^{\beta\sigma} + \frac{1}{2} g_{,\beta}^{\mu\alpha} g_{,\nu\theta}^{\beta\theta} - \frac{1}{2} (\mathfrak{G}_{\alpha\beta} g_{,\nu}^{\mu\beta} g_{,\rho}^{\alpha\sigma} g_{,\sigma}^{\beta\theta} \\ &- \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} \mathfrak{G}_{\beta\nu} g_{,\nu}^{\mu\theta} g_{,\sigma}^{\beta\theta} - \frac{1}{8} g^{\mu\alpha} \mathfrak{G}_{\rho\sigma} g_{,\nu}^{\rho\sigma} (\mathfrak{G}_{\lambda\beta} g_{,\beta}^{\nu\lambda} g_{,\nu}^{\mu\theta})). \end{aligned} \right\} \quad (2,5)$$

Die rechte Seite dieser Beziehung enthält nur Terme, die bei Erfüllung der Donderschen Koordinatenbedingung verschwinden.

§ 3. Das Näherungsverfahren

Unserem Näherungsverfahren liegt die Annahme zugrunde, daß das Feld schwach ist. Dann wird $g^{\mu r}$ in eine Reihe entwickelbar sein:

$$g^{\mu r} = \eta^{\mu r} + v^{\mu r} + w^{\mu r} + \dots \quad (3,1)$$

$\eta^{\mu r}$ ist der Term nullter Ordnung⁶⁾, $v^{\mu r}$ erster Ordnung, $w^{\mu r}$ zweiter usw. Die Grenzbedingung (1,2), die auch in der Form $g^{\mu r} \rightarrow \eta^{\mu r}$ für $r \rightarrow \infty$ geschrieben werden kann, verlangt, daß sämtliche Terme $v^{\mu r}$, $w^{\mu r}$ usw. von (3,1) bei $r \rightarrow \infty$ gegen Null streben. Eine zu (3,1) analoge Entwicklung gilt auch für $\mathfrak{G}_{\mu r}$:

$$\mathfrak{G}_{\mu r} = \eta_{\mu r} + V_{\mu r} + W_{\mu r} + \dots \quad (3,2)$$

Dabei sind die $V_{\mu r}$, $W_{\mu r}$ usw. Funktionen von $v^{\mu r}$, $w^{\mu r}$ usw., die man mit Hilfe der Beziehung (2,1) bestimmen kann. So findet man für $V_{\mu r}$ und $W_{\mu r}$:

$$\left. \begin{aligned} V_{\mu r} &= - \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} v^{\alpha\beta}, \\ W_{\mu r} &= - \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} w^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\sigma} v^{\alpha\rho} v^{\beta\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (3,3)$$

Ferner fordern wir die Erfüllung der Donderschen Koordinatenbedingung,

$$g_{,\nu}^{\mu r} = 0, \quad (3,4)$$

so daß die Feldgleichungen lauten:

$$I^{\mu r} = 0. \quad (3,5)$$

Die Koordinatenbedingung denken wir uns für jede Stufe des Näherungsverfahrens erfüllt:

$$v_{,\nu}^{\mu r} = w_{,\nu}^{\mu r} = \dots = 0. \quad (3,6)$$

Führen wir die Entwicklungen (3,1) und (3,2) in (2,3) ein, so nehmen die Feldgleichungen (3,5) ebenfalls die Form einer Reihe an, die mit Termen

⁶⁾ $\eta^{\mu r}$ ist der Minkowskische metrische Tensor in Normalform:

$$\eta^{kl} = -\delta^{kl}, \quad \eta^{4i} = 0, \quad \eta^{44} = 1.$$

Die lateinischen Indizes sollen nur die Werte 1, 2, 3 annehmen, dagegen die griechischen die Werte 1, 2, 3, 4.

erster Ordnung anfängt. Wir geben das Ergebnis dieser Rechnung bis zu Termen zweiter Ordnung an:

$$\begin{aligned}
 I^{\mu\nu} = & \left(-\frac{1}{2} \square v^{\mu\nu} \right) \\
 & + \left(-\frac{1}{2} \square w^{\mu\nu} - \frac{1}{2} v^{\rho\sigma} v_{,\rho\sigma}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} v_{,\rho}^{\mu\sigma} v_{,\sigma}^{\nu\rho} + \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \eta_{\alpha\beta} v_{,\rho}^{\mu\beta} v_{,\sigma}^{\nu\alpha} \right. \\
 & \quad - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} v_{,\sigma}^{\alpha\eta} \left[\eta^{\mu\alpha} v_{,\rho}^{\beta\eta} + \eta^{\nu\alpha} v_{,\rho}^{\beta\mu} \right] - \frac{1}{4} \eta^{\mu\eta} \eta^{\nu\sigma} V_{\alpha\beta,\sigma} v_{,\rho}^{\alpha\beta} \\
 & \quad + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} v_{,\sigma}^{\alpha\eta} v_{,\rho}^{\beta\sigma} + \frac{1}{8} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} V_{\alpha\beta,\rho} v_{,\sigma}^{\alpha\beta} \\
 & \quad \left. + \frac{1}{16} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} v_{,\alpha} v_{,\beta} - \frac{1}{8} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} v_{,\alpha} v_{,\beta} \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{3,7}$$

Dabei bedeutet \square den d'Alembertschen Operator der speziellen Relativitätstheorie,

$$\square f = \eta^{\alpha\beta} f_{,\alpha\beta},$$

und es wurde zur Abkürzung

$$\eta_{\alpha\beta} v^{\alpha\beta} = v \tag{3,8}$$

gesetzt. Die allgemeine Struktur der Summen höherer Ordnung in (3,7) ist unmittelbar ersichtlich: Die Summe n -ter Ordnung enthält zunächst den mit $-\frac{1}{2} \square$ multiplizierten Term n -ter Ordnung von $g^{\mu\nu}$ und dann nur Produkte von Faktoren niedrigerer Ordnung (wobei die Summe der Ordnungen der verschiedenen Faktoren gleich n ist).

Zur Erfüllung der Feldgleichung (3,7) müssen wir fordern, daß die einzelnen Summen von Termen jeder gegebenen Ordnung verschwinden. Wir erhalten also in der ersten und zweiten Näherung:

$$\square v^{\mu\nu} = 0; \tag{3,9}$$

$$\begin{aligned}
 \square w^{\mu\nu} = & -v^{\rho\sigma} v_{,\rho\sigma}^{\mu\nu} + v_{,\rho}^{\mu\eta} v_{,\sigma}^{\nu\eta} - \eta_{\alpha\beta} v_{,\sigma}^{\alpha\eta} \left(\eta^{\mu\sigma} v_{,\rho}^{\beta\eta} + \eta^{\nu\sigma} v_{,\rho}^{\beta\mu} \right) \\
 & + \eta_{\alpha\beta} \eta^{\rho\sigma} v_{,\rho}^{\mu\beta} v_{,\sigma}^{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} V_{\alpha\beta,\sigma} v_{,\rho}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} v_{,\sigma}^{\alpha\eta} v_{,\rho}^{\beta\sigma} \\
 & + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} V_{\alpha\beta,\rho} v_{,\sigma}^{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{8} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \right) v_{,\alpha} v_{,\beta}.
 \end{aligned} \tag{3,10}$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die höheren Näherungsstufen.

Mit Hilfe dieser Formeln kann man versuchen, nichtsinguläre Lösungen der Feldgleichungen für den Fall, daß das Feld im ganzen Raum schwach ist, nach folgender Methode zu ermitteln: Man gehe von Größen $v^{\mu\nu}$ aus, die im ganzen Raum die Gleichungen

$$\square v^{\mu\nu} = 0 \quad \text{und} \quad v_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$$

sowie die Grenzbedingung $v^{\mu\nu} \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ erfüllen; man bestimme dann zunächst $w^{\mu\nu}$ als Lösung von (3,10), dann den Term 3. Ordnung aus der entsprechenden Gleichung usw.

Damit das aus v^μ , $w^{\mu\nu}$ usw. nach (3,1) entstehende $g^{\mu\nu}$ tatsächlich eine Lösung der Feldgleichungen ist, müssen die aus (3,10) gewonnenen $w^{\mu\nu}$ die

bis zu

Beziehung $w_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$ erfüllen (ähnliches gilt auch für die Terme höherer Ordnungen). Wir wollen hier zeigen, daß dies immer möglich sein wird. Nach der Identität (2,5) folgt aus den Feldgleichungen (3,5) bzw. (3,9) und (3,10) das Verschwinden der rechten Seite von (2,5). Führen wir in sie die Entwicklung (3,1) ein und rechnen wir dabei bis zu Termen zweiter Ordnung, so finden wir

$$\begin{aligned} (\square v_{,\nu}^{\mu\nu}) + (\square w_{,\nu}^{\mu\nu} + v^{\alpha\beta} v_{,\nu\alpha\beta}^{\mu\nu} + \eta^{\mu\alpha} \eta_{\beta\nu} v_{,\alpha}^{\nu\sigma} v_{,\nu\sigma}^{\beta\nu} - \eta^{\nu\alpha} \eta_{\beta\nu} v_{,\nu}^{\mu\sigma} v_{,\sigma\alpha}^{\nu\beta} - v_{,\beta}^{\mu\alpha} v_{,\nu\alpha}^{\nu\beta}) \\ + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3,11)$$

(3,7)

Daher folgt aus $v_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$ und den Feldgleichungen (3,9), (3,10):

$$\square w_{,\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (3,12)$$

Wenn wir als Lösung von (3,10) die retardierte bzw. die avancierte Lösung (oder eine bestimmte Kombination dieser Lösungen) genommen hätten, würden wir dasselbe auch für die Lösung von (3,12) tun müssen, wobei daraus $w_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$ folgen würde. Bei allgemeineren Lösungen kann zwar $w_{,\nu}^{\mu\nu} \neq 0$ werden; nach Hinzufügung einer geeigneten Lösung der homogenen Gleichung $\square w^{\mu\nu} = 0$ wird man aber dann wieder erreichen, daß $w_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$ wird. Diese Beziehung ist also immer erfüllbar. Ähnliches gilt auch für die Größen höherer Ordnungen, so daß die gesamte Koordinatenbedingung in der Form (3,6) befriedigt werden kann⁷⁾.

Wir bemerken noch, daß wegen (3,9) und der ersten Gleichung (3,6) die Beziehung (3,10) auch so geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \square w^{\mu\nu} = & \square \left(\frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} v^{\mu\alpha} v^{\nu\beta} - \frac{1}{8} \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\varrho\sigma} v^{\alpha\varrho} v^{\beta\sigma} + \frac{1}{16} \eta^{\mu\nu} v^2 \right) \\ & + \left(v^{\mu\alpha} v^{\nu\beta} - v^{\mu\nu} v^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta_{\varrho\sigma} v^{\alpha\varrho} v^{\beta\sigma} \right)_{,\alpha\beta} \\ & - \left(\eta^{\mu\beta} \eta_{\varrho\sigma} v^{\nu\alpha} v_{,\beta}^{\varrho\alpha} + \eta^{\nu\beta} \eta_{\varrho\sigma} v^{\mu\alpha} v_{,\beta}^{\varrho\alpha} \right)_\alpha \\ & + \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \left(\eta_{\alpha\lambda} \eta_{\varrho\sigma} v_{,\lambda}^{\nu\varrho} v_{,\beta}^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} v_{,\alpha} v_{,\beta} \right). \end{aligned} \quad (3,13)$$

Diese Form wird bei der folgenden Diskussion besonders nützlich sein.

§ 4. Zeitlich periodisches $g^{\mu\nu}$

Im folgenden betrachten wir ein metrisches Feld, dessen sämtliche Komponenten $g^{\mu\nu}$ periodische Funktionen der Zeit, mit derselben Grundperiode T ,

⁷⁾ Die Zerlegung (3,6) der Koordinatenbedingung scheint uns für das hier behandelte Problem – Bestimmung eines singularitätenfreien Feldes, welches ein einziges Teilchen darstellen soll – die zweckmäßigste zu sein. Dagegen hätte man bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen eines Systems von makroskopischen Körpern, die durch einen Materietensor $T_{\mu\nu}$ beschrieben werden, folgende Zerlegung von (3,4) zu verwenden:

$v_{,\nu}^{\mu\nu}$ soll klein von (mindestens) der zweiten Ordnung sein, $v_{,\nu}^{\mu\nu} + w_{,\nu}^{\mu\nu}$ von der dritten Ordnung usw. Auch in diesem Fall folgt die Erfüllbarkeit der Koordinatenbedingung aus (3,11), da nach dieser Beziehung $\square(v_{,\nu}^{\mu\nu} + w_{,\nu}^{\mu\nu})$ klein von der dritten Ordnung ist und daher auch $v_{,\nu}^{\mu\nu} + w_{,\nu}^{\mu\nu}$ klein von derselben Ordnung gemacht werden kann.

sind⁸⁾). Bei Gültigkeit der Entwicklung (3,1) wird ersichtlich diese Periodizität getrennt für jeden der Terme $v^{\mu r}, w^{\mu r}, \dots$ gelten müssen. Denkt man sich $v^{\mu r}$ in eine Fourierreihe entwickelt, so wird

$$v^{\mu r} = v_{(0)}^{\mu r} + \sum_{\lambda} \left(v_{(\lambda)}^{\mu r} \sin \lambda \omega t + v_{(\lambda)}^{\prime \mu r} \cos \lambda \omega t \right) \quad (4,1)$$

($\omega = 2\pi/T$; $\lambda = 1, 2, 3 \dots$). Dabei sind die Größen $v_{(0)}^{\mu r}, v_{(1)}^{\mu r}, v_{(2)}^{\mu r}$ von der Zeit unabhängig. Dieselbe Form werden auch die anderen Terme $w^{\mu r}, \dots$ der Entwicklung (3,1) haben.

In diesem Fall können wir durch Mittelwertbildung über die Grundperiode T aus der Gl. (3,13) eine einfache Beziehung gewinnen, die für die folgenden Betrachtungen von Wichtigkeit sein wird. Wir bemerken zunächst, daß für eine beliebige Größe f , die von der Zeit periodisch abhängt, gilt

$$\int_T \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0.$$

Daher reduziert sich der d'Alembertsche Operator auf den Laplaceeschen,

$$\frac{1}{T} \int_T \square f dt = - \frac{1}{T} \int_T \Delta f dt = - \Delta f, \quad (4,2)$$

wobei die Überstreichung den zeitlichen Mittelwert bedeutet:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f dt. \quad (4,3)$$

Insgesamt ergibt die Mittelwertbildung von (3,13) die Beziehung

$$\begin{aligned} \Delta w^{\mu r} &= \Delta \left(\frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} v^{\mu\alpha} v^{r\beta} - \frac{1}{8} \eta^{\mu r} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\varrho\sigma} \bar{v}^{\alpha\varrho} \bar{v}^{\beta\sigma} + \frac{1}{16} \eta^{\mu r} \bar{v}^2 \right) \\ &\quad - \left(\bar{v}^{\mu k} v^{rl} - v^{\mu r} v^{kl} + \frac{1}{2} \eta^{\mu r} \eta_{\alpha\beta} v^{\alpha k} v^{\beta l} \right)_{,kl} \\ &\quad + \left(\eta^{\mu\beta} \eta_{\varrho\sigma} \bar{v}^{\varrho\sigma} \bar{v}_{,\beta}^l + \eta^{\nu\beta} \eta_{\varrho\sigma} v^{\mu\sigma} v_{,\beta}^l \right)_{,l} \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{r\beta} \left(\eta_{\alpha\lambda} \eta_{\varrho\sigma} \bar{v}_{,\lambda}^{\varrho} \bar{v}_{,\beta}^l - \frac{1}{2} \bar{v}_{,\lambda} v_{,\beta} \right). \end{aligned} \quad (4,4)$$

Wir können diese Beziehung auch in der Form schreiben:

$$\Delta w^{\mu r} = (f_{,k}^{\mu rkl} + q^{\mu rl}),_l - \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{r\beta} \eta_{\alpha\lambda} \eta_{\varrho\sigma} \bar{v}_{,\lambda}^{\varrho} \bar{v}_{,\beta}^l + \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} \eta^{r\beta} \bar{v}_{,\lambda} \bar{v}_{,\beta} \quad (4,5)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} f^{\mu rkl} &= - \eta^{kl} \left(\frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} v^{\mu\alpha} v^{r\beta} - \frac{1}{8} \eta^{\mu r} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\varrho\sigma} \bar{v}^{\alpha\varrho} \bar{v}^{\beta\sigma} + \frac{1}{16} \eta^{\mu r} \bar{v}^2 \right) \\ &\quad - \left(v^{\mu k} v^{rl} - v^{\mu r} v^{kl} + \frac{1}{2} \eta^{\mu r} \eta_{\alpha\beta} v^{\alpha k} v^{\beta l} \right), \end{aligned} \quad (4,6)$$

$$q^{\mu rl} = \eta^{\mu\beta} \eta_{\varrho\sigma} \bar{v}^{\varrho\sigma} \bar{v}_{,\beta}^l + \eta^{\nu\beta} \eta_{\varrho\sigma} v^{\mu\sigma} v_{,\beta}^l.$$

Im folgenden wird die Komponente $\mu = r = 4$ der Gl. (4,5) eine besonders wichtige Rolle spielen.

⁸⁾ Man beachte, daß dies keine invariante Eigenschaft ist: Die $g^{\mu r}$ können nur in einer bestimmten Klasse von Koordinatensystemen von der entsprechenden Zeitkoordinate periodisch abhängen.

§ 5. Die Lösung der Gleichung $\square v^{\mu r} = 0$

Für die Terme $v_{(\lambda)}'^{\mu r}$ sin $\lambda \omega t$ und $v_{(\lambda)}''^{\mu r}$ cos $\lambda \omega t$ der Entwicklung (4,1) nimmt die Feldgleichung (3,9) die Form an ($\square = -A + \frac{\partial^2}{c^2 r^2}$)

$$(A + \lambda^2 k^2) v_{(\lambda)}'^{\mu r} = (A + \lambda^2 k^2) v_{(\lambda)}''^{\mu r} = 0 \quad (5,1)$$

mit

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (5,2)$$

Dagegen ergibt sich für $v_{(0)}^{\mu r}$

$$\square v_{(0)}^{\mu r} = 0. \quad (5,3)$$

Die der Grenzbedingung $v^{\mu r} \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ angepaßte Form der Lösung von (5,1) ergibt sich, wenn man die Methode der Trennung der Veränderlichen in bezug auf die Polarkoordinaten r, θ, φ des 3-dimensionalen Raumes anwendet. Die Lösung enthält dann die zugeordneten Kugelfunktionen $P_n^m(\cos \theta)$ und die Besselschen Funktionen mit halbzahligen Indizes⁹⁾:

$$v_{(\lambda)}'^{\mu r} = \sum_{m,n} \left\{ \left(A_{(\lambda)m+}^{\mu r n} \cos m \varphi + B_{(\lambda)m+}^{\mu r n} \sin m \varphi \right) P_n^m \frac{1}{\sqrt{r}} I_{n+\frac{1}{2}}(\lambda k r) \right. \\ \left. + \left(A_{(\lambda)m-}^{\mu r n} \cos m \varphi + B_{(\lambda)m-}^{\mu r n} \sin m \varphi \right) P_n^m \frac{1}{\sqrt{r}} I_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda k r) \right\}; \quad (5,4)$$

Summation über $m = 0, 1, \dots, n$ und $n = 1, 2, 3, \dots$; $A_{(\lambda)m+}^{\mu r n}$ usw. konstante Koeffizienten. Eine ähnlich gebaute Formel gilt für $v_{(\lambda)}''^{\mu r}$. Dagegen lautet die Lösung von (5,3)

$$v_{(0)}^{\mu r} = \sum_{m,n} \left\{ \left(A_{(0)m+}^{\mu r n} \cos m \varphi + B_{(0)m+}^{\mu r n} \sin m \varphi \right) P_n^m r^n \right. \\ \left. + \left(A_{(0)m-}^{\mu r n} \cos m \varphi + B_{(0)m-}^{\mu r n} \sin m \varphi \right) P_n^m \frac{1}{r^{n+1}} \right\}. \quad (5,5)$$

Die zu r^n proportionalen Terme in (5,5) sind mit der Grenzbedingung unvereinbar und müssen daher ausgeschlossen werden. Die übrigen Terme in (5,5) sowie die Besselfunktionen mit negativen Indizes enthaltenden Terme in den Ausdrücken von $v_{(\lambda)}'^{\mu r}$ und $v_{(\lambda)}''^{\mu r}$ sind an der Stelle $r = 0$ singulär. Wir werden uns in der vorliegenden Arbeit nur für den Fall interessieren, daß das (singularitätenfreie) Gravitationsfeld im ganzen Raum schwach ist. Dann müssen wir alle diese, an der Stelle $r = 0$ singulären Terme ausschließen. $v^{\mu r}$ reduziert sich also auf¹⁰⁾

$$v^{\mu r} = \sum_{\lambda m n} \left\{ \left(A_{(\lambda)m}^{\mu r n} \cos m \varphi + B_{(\lambda)m}^{\mu r n} \sin m \varphi \right) \sin \lambda \omega t \right. \\ \left. + \left(A_{(\lambda)m}''^{\mu r n} \cos m \varphi + B_{(\lambda)m}''^{\mu r n} \sin m \varphi \right) \cos \lambda \omega t \right\} P_n^m \frac{1}{\sqrt{r}} I_{r+\frac{1}{2}}(\lambda k r). \quad (5,6)$$

Auf die durch (5,6) gegebenen $v^{\mu r}$ muß man noch die Koordinatenbedingung $v_{,r}^{\mu r} = 0$ anwenden. Dies läßt sich ohne Schwierigkeit mit Hilfe der

⁹⁾ Vgl. z. B. Whittaker & Watson, Modern Analysis (Cambridge University Press 1952), S. 397.

¹⁰⁾ Bei genügend kleinen Koeffizienten A und B wird das durch (5,6) gegebene $v^{\mu r}$ ersichtlich im ganzen Raum klein sein, $|v^{\mu r}| < 1$.

Rekursionsformeln für die Kugel- und Besselfunktionen durchführen und ergibt lediglich eine Anzahl von Beziehungen zwischen den in (5,6) auftretenden Konstanten A und B . Diese Beziehungen sind aber für das folgende unwesentlich, so daß wir hier auf ihre Ableitung verzichten dürfen.

Die auf diese Weise ermittelte Form von $v^{\mu\nu}$ enthält eine Anzahl von un interessanten Termen. Es sind dies Terme, die zu einem in der ersten Näherung verschwindenden Krümmungstensor führen: Solche Terme kann man auch im ebenen Raum durch geeignete Koordinatentransformation gewinnen. Wir müssen uns also vorerst mit denjenigen Termen von $v^{\mu\nu}$ beschäftigen, die zu einem nichtverschwindenden Krümmungstensor führen. Dies werden wir in den nächsten Abschnitten tun und dabei zu folgendem Ergebnis gelangen: Alle Terme von $v^{\mu\nu}$, die einem nichtverschwindenden Krümmungstensor entsprechen, müssen ausgeschlossen werden, weil sie zu einem bei $r \rightarrow \infty$ unbeschränkt wachsenden Wert von \bar{w}^{44} führen und deshalb mit der Grenzbedingung (1,2) unvereinbar sind. Der Beweis wird mit Hilfe der Komponente $\mu = \nu = 4$ der Beziehung (4,5) erbracht. Diese hat die Form

$$\Delta \bar{w}^{44} = \{ \dots \}_l - \frac{1}{2} \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\sigma\tau} v_{,4}^{\kappa\sigma} v_{,4}^{\lambda\tau} + \frac{1}{4} \bar{v}_{,4} \bar{v}_{,4}. \quad (5,7)$$

In bezug auf die Klammer auf der rechten Seite dieser Beziehung wird es für die folgenden Betrachtungen genügen zu bemerken, daß sie Terme enthält, die für $r \rightarrow \infty$ wie $r^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 2$ zu Null streben¹¹⁾.

§ 6. Eine notwendige Bedingung für annehmbares \bar{w}^{44}

Wir gehen von dem folgenden Hilfssatz aus: Die Funktion φ genüge der Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = f(x, y, z); \quad (6,1)$$

dabei sei das überall endliche f so beschaffen, daß das Integral $\int f dv$ innerhalb der Kugel von Radius r für große r asymptotisch proportional zu r wird (dies ist z. B. der Fall, wenn f asymptotisch die Form $\text{const } \frac{1}{r^2}$ annimmt); dann muß φ für große r asymptotisch zu $\ln r$ proportional werden und daher für $r \rightarrow \infty$ unbeschränkt wachsen. Der Beweis folgt unmittelbar durch Integration von (6,1) innerhalb der Kugel vom Radius r :

$$\int_r f dv = \int_r \Delta \varphi dv = \int_r \varphi_{,l} \frac{x^l}{r} dS. \quad (6,2)$$

Da nach unserer Annahme das erste Integral asymptotisch proportional zu r ist, muß $\varphi_{,l}$ asymptotisch proportional zu $\frac{x^l}{r^2}$, d. h. φ proportional zu $\ln r$ sein.

¹¹⁾ Weil die Besselfunktionen für $r \rightarrow \infty$ wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$ verschwinden, wonach das durch (5,6) gegebene $v^{\mu\nu}$ wie $\frac{1}{r}$ verschwinden muß. Alle Terme auf der rechten Seite von (4,5) bzw. (5,7) sind Produkte von zwei Faktoren $v^{\mu\nu}$.

Wir wenden diesen Satz auf die Formel (5,7) mit $\varphi = \overline{w^4}$ an. Der Term $\{\cdot\cdot\cdot\}_{,l}$ liefert nach dem Gaußschen Satz

$$\int_r \{\cdot\cdot\cdot\}_{,l} dv = \int_r \{\cdot\cdot\cdot\} \frac{x^l}{r} dS.$$

Da die Klammer $\{\cdot\cdot\cdot\}$ nur Terme enthält, die für $r \rightarrow \infty$ wie $\frac{1}{r^\alpha}$ mit $\alpha \geq 2$ verschwinden, wird dieses Integral endlich. Dagegen sind in den zwei letzten Summen von (5,7) mehrere Terme enthalten, die für großes r zu $\frac{1}{r^2}$ proportional werden und daher ein divergierendes Volumintegral ergeben. Führt man nämlich in diesen Summen zunächst die Zeitdifferentiationen und dann die Mittelung über die Periode T aus, so folgt aus (4,1)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\varrho\sigma} \overline{v_{,4}^{\kappa\varrho} v_{,4}^{\lambda\sigma}} - \frac{1}{4} \overline{v_{,4} v_{,4}} \\ &= \frac{1}{4} k^2 \sum_{\lambda} \lambda^2 \left\{ \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\varrho\sigma} (v_{(\lambda)}'^{\kappa\varrho} v_{(\lambda)}'^{\lambda\sigma} + v_{(\lambda)}''^{\kappa\varrho} v_{(\lambda)}''^{\lambda\sigma}) - \frac{1}{2} (v_{(\lambda)}'^2 + v_{(\lambda)}''^2) \right\} \quad (6,3) \end{aligned}$$

mit

$$v'_{(\lambda)} = \eta_{\alpha\beta} v_{(\lambda)}'^{\alpha\beta}, \quad v''_{\lambda} = \eta_{\alpha\beta} v_{(\lambda)}''^{\alpha\beta}.$$

Beachtet man nun, daß in $\frac{1}{\sqrt{r}} I_{r+\frac{1}{2}} (\lambda k r)$ Terme der Form $\frac{\sin \lambda k r}{r^\alpha}$ und $\frac{\cos \lambda k r}{r^\alpha}$ mit $\alpha \geq 1$ enthalten sind, so sieht man, daß durch die Produktbildung auf der rechten Seite von (6,3) Terme von der Form

$$\frac{\sin^2 \lambda k r}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} + \dots, \quad \frac{\cos^2 \lambda k r}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} + \dots$$

aufreten werden¹²⁾. Nach dem Hilfssatz wird man also aus (5,7) nur dann einen bei $r \rightarrow \infty$ endlichen Wert von $\overline{w^4}$ erhalten können, wenn folgende notwendige Bedingung erfüllt wird: Das Integral der zwei letzten Summen in (5,7) über eine Kugel vom Radius r darf bei $r \rightarrow \infty$ keinen zu r proportionalen Wert ergeben (d. h. die Volumintegrale der verschiedenen zu $\frac{1}{r^2}$ proportionalen Terme müssen sich gegenseitig aufheben).

§ 7. Eine Koordinatentransformation

Wir werden zeigen, daß diese notwendige Bedingung nur dann erfüllt wird, wenn die Größen $v^{\mu\nu}$ zu einem verschwindenden Krümmungstensor führen. Dies werden wir erreichen, indem wir durch eine Koordinatentransformation der Form

$$x^{*\mu} = x^\mu + f^\mu(x^\nu), \quad (7,1)$$

wobei die f^μ klein von der ersten Ordnung sind, zu neuen Größen $v^{*\mu\nu}$ übergehen, die folgende Eigenschaften haben: Die $v^{*\mu\nu}$ sind ebenfalls von

¹²⁾ Das Volumintegral von $\frac{\cos 2 \lambda k r}{r^2}$ innerhalb der Kugel vom Radius r bleibt endlich bei $r \rightarrow \infty$.

der Form (5,6) und genügen der Koordinatenbedingung $v_{,\nu}^{*\mu\nu} = 0$; ferner gilt

$$v^{*\mu\nu} = 0, \quad v^* = 0.$$

Wir gehen aus von der allgemeinen Transformationsformel

$$g^{*\mu\nu} = \frac{\partial x^{*\mu}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{*\nu}}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \cdot \det \frac{\partial x}{\partial x^*}. \quad (7,3)$$

Nach (7,1) ist

$$\frac{\partial x^{*\mu}}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\mu + f_{,\alpha}^\mu. \quad (7,4)$$

Daraus folgt für die Determinante dieser Ableitungen in erster Näherung der Wert

$$\det \frac{\partial x^*}{\partial x} = 1 + f_{,\alpha}^\alpha + \dots$$

Daher

$$\det \frac{\partial x}{\partial x^*} = \left(\det \frac{\partial x^*}{\partial x} \right)^{-1} = 1 - f_{,\alpha}^\alpha + \dots. \quad (7,5)$$

Führt man (7,4) und (7,5) in (7,3) ein, so ergibt sich mit $g^{*\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + v^{*\mu\nu} + \dots$:

$$v^{*\mu\nu} = v^{\mu\nu} + \eta^{\mu\alpha} f_{,\alpha}^\nu + \eta^{\nu\alpha} f_{,\alpha}^\mu - \eta^{\mu\nu} f_{,\alpha}^\alpha. \quad (7,6)$$

Daraus folgt, wenn man die Beziehung $v_{,\nu}^{*\mu} = 0$ berücksichtigt:

$$v_{,\nu}^{*\mu\nu} = \square f^\mu.$$

Die Erfüllung der Koordinatenbedingung für $v^{*\mu\nu}$ fordert also, daß f^μ eine Lösung von

$$\square f^\mu = 0 \quad (7,7)$$

ist. Dann wird aber nach (7,6) und (3,9) auch die Forderung

$$\square v^{*\mu\nu} = 0$$

erfüllt. Aus (7,6) folgt noch

$$v^* = v - 2 f_{,\alpha}^\alpha. \quad (7,8)$$

Die Forderung (7,2) führt nach (7,6) und (7,8) zu den Bedingungen

$$v^{4s} + f_{,4}^s - f_{,s}^4 = 0, \quad v - 2 f_{,\alpha}^\alpha = 0. \quad (7,9)$$

Dabei haben wir die Forderung $v^{*44} = 0$ noch nicht berücksichtigt. Man überzeugt sich leicht, daß die Bedingungen (7,9) erfüllt werden, wenn man f^μ folgendermaßen wählt:

$$f_{,4}^4 = \frac{1}{4} v - \frac{1}{2} v^{44}, \quad f_{,4}^s = f_{,s}^4 - v^{4s}. \quad (7,10)$$

Die erste dieser Gleichungen erlaubt die unmittelbare Bestimmung von f^μ aus den gegebenen $v^{\mu\nu}$. Das so gewonnene f^μ ist wieder von der Form der rechten Seite von (5,6) und befriedigt daher die Gleichung $\square f^\mu = 0$. Dann wird aber auch $f_{,s}^4$ die Form der rechten Seite von (5,6) haben¹³⁾ und daher

¹³⁾ Weil a) wegen $\square f^\mu = 0$ auch $\square f_{,s}^4 = 0$ wird und b) durch die Differentiation des nichtsingulären f^μ keine Singularität erzeugt werden kann. Letzteres läßt sich auch unmittelbar mit Hilfe der Rekursionsformeln für die Kugel- und Besselfunktionen bestätigen.

nach der zweiten Gl. (7,10) auch f^8 . Weiter folgt aus $v_{,4}^{*\mu\nu} = 0$ für $\mu = 4$, wenn man beachtet, daß nach der ersten Gl. (7,9) $v^{*44} = 0$ ist:

$$v_{,4}^{*44} = 0.$$

Da aber auch v^{*44} von der Form der rechten Seite von (5,6) ist — ohne zeitunabhängigen Term —, folgt daraus

$$v^{*44} = 0. \quad (7,11)$$

Damit ist der volle Beweis von der Existenz der geforderten Koordinatentransformation erbracht.

Geht man von der Formel (7,6) aus, so ergibt eine direkte Rechnung

$$\begin{aligned} \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\theta\sigma} v^{*\kappa\theta} v^{*\lambda\sigma} &= \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\theta\sigma} v^{\kappa\theta} v^{\lambda\sigma} - 2v f_{,\theta}^\kappa + 4\eta_{\theta\sigma} v^{\sigma\lambda} f_{,\lambda}^\theta + 2\eta^{\theta\sigma} \eta_{\alpha\beta} f_{,\theta}^\alpha f_{,\sigma}^\beta \\ &\quad + 2f_{,\beta}^\alpha f_{,\alpha}^\beta, \\ v^{*2} &= v^2 - 4v f_{,\alpha}^\alpha + 4f_{,\alpha}^\alpha f_{,\beta}^\beta, \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\theta\sigma} v^{*\kappa\theta} v^{*\lambda\sigma} - \frac{1}{4} v^{*2} &= \frac{1}{2} \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\theta\sigma} v^{\kappa\theta} v^{\lambda\sigma} - \frac{1}{4} v^2 \\ &\quad + (2\eta_{\alpha\beta} v^{\beta\theta} f_{,\theta}^\alpha + \eta^{\theta\sigma} \eta_{\alpha\beta} f_{,\theta}^\alpha f_{,\sigma}^\beta + f_{,\alpha}^\theta f_{,\theta}^\alpha - f_{,\theta}^\theta f_{,\alpha}^\alpha)_\theta. \end{aligned}$$

Man kann dieselbe Rechnung wiederholen, nachdem man zunächst Gl. (7,6) nach x^4 differenziert hat. Das Ergebnis unterscheidet sich von der letzten Gleichung lediglich dadurch, daß alle Größen $v^{*\mu\nu}$, $v^{\mu\nu}$ und f^μ zusätzlich den Differentiationsindex 4 erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\theta\sigma} v_{,4}^{*\kappa\theta} v_{,4}^{*\lambda\sigma} - \frac{1}{4} (v_{,4}^*)^2 &= \frac{1}{2} \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\theta\sigma} v_{,4}^{\kappa\theta} v_{,4}^{\lambda\sigma} - \frac{1}{4} (v_{,4})^2 \\ &\quad + (2\eta_{\alpha\beta} v_{,4}^{\beta\theta} f_{,\theta}^\alpha + \eta^{\theta\sigma} \eta_{\alpha\beta} f_{,\theta}^\alpha f_{,\sigma}^\beta + f_{,\alpha}^\theta f_{,\theta}^\alpha - f_{,\theta}^\theta f_{,\alpha}^\alpha)_\theta. \end{aligned} \quad (7,12)$$

Die Mittelung dieser Beziehung über die Periode T ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\theta\sigma} v_{,4}^{*\kappa\theta} v_{,4}^{*\lambda\sigma} - \frac{1}{4} (\overline{v_{,4}^*})^2 &= \frac{1}{2} \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\theta\sigma} \overline{v_{,4}^{\kappa\theta}} \overline{v_{,4}^{\lambda\sigma}} - \frac{1}{4} \overline{(v_{,4})^2} \\ &\quad + (2\eta_{\alpha\beta} \overline{v_{,4}^{\beta\theta} f_{,\theta}^\alpha} + \eta^{\theta\sigma} \eta_{\alpha\beta} \overline{f_{,\theta}^\alpha f_{,\sigma}^\beta} + \overline{f_{,\alpha}^\theta f_{,\theta}^\alpha} - \overline{f_{,\theta}^\theta f_{,\alpha}^\alpha})_l. \end{aligned} \quad (7,13)$$

Addiert man diese Gleichung zu (5,7), so folgt

$$\Delta \overline{w^{44}} = \{\cdot\cdot\}_l - \frac{1}{2} \eta_{\kappa\lambda} \eta_{\theta\sigma} \overline{v_{,4}^{*\kappa\theta} v_{,4}^{*\lambda\sigma}} + \frac{1}{4} \overline{(v_{,4}^*)^2}. \quad (7,14)$$

Die Klammer $\{\cdot\cdot\}$ in der rechten Seite von (7,14), die gleich der Summe der Klammern von (5,7) und (7,13) ist, hat dieselbe Eigenschaft wie die Klammer in (5,7) — d. h. sie enthält nur Terme, die für $r \rightarrow \infty$ wie $\frac{1}{r^\alpha}$ mit $\alpha \geq 2$ verschwinden —, da die Größen f^α dieselbe Struktur wie die durch (5,6) gegebene $v^{\mu\nu}$ haben. Beachten wir (7,2), so nimmt (7,14) die Form an

$$\Delta \overline{w^{44}} = \{\cdot\cdot\}_l - \frac{1}{2} \sum_{p,q} (v_{,4}^{*pq})^2 \quad (p, q = 1, 2, 3). \quad (7,15)$$

§ 8. Diskussion der notwendigen Bedingung

Die in § 6 aufgestellte notwendige Bedingung für die Existenz eines annehmbaren v^4 lautet, wenn wir sie auf Gl. (7,15) anwenden: Die divergierenden Volumintegrale der in der letzten Summe dieser Gleichung enthaltenen Terme müssen sich gegenseitig aufheben. Die Diskussion dieser Bedingung wird jetzt wesentlich einfacher als bei der Gl. (5,7), weil die Summe in (7,15) nur Terme enthält, die dasselbe Vorzeichen haben. Führen wir die Differentiation nach x^4 und anschließend die Mittelwertbildung wie in (6,3) aus, so finden wir

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q} \overline{(v_{(k)}^{*p q})^2} = \frac{k^2}{4} \sum_{p,q} \sum_{\lambda} \lambda^2 [(v_{(\lambda)}^{*p q})^2 + (v_{(\lambda)}^{*\prime p q})^2]. \quad (8,1)$$

Betrachten wir den Term $(v_{(\lambda)}^{*p q})^2$, so liefert er nach (5,4) das Volumintegral

$$\int_r \sum_{m,n} (A_{(\lambda)m}^{*p q n} \cos m \varphi + B_{(\lambda)m}^{*p q n} \sin m \varphi) P_n^m \frac{1}{\sqrt{r}} I_{n+\frac{1}{2}} (\lambda k r) \cdot \sum_{m'n'} (A_{(\lambda)m'}^{*\prime p q n'} \cos m' \varphi + B_{(\lambda)m'}^{*\prime p q n'} \sin m' \varphi) P_{n'}^{m'} \frac{1}{\sqrt{r}} I_{n'+\frac{1}{2}} (\lambda k r) \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta \cdot dq.$$

Die Integration über φ ergibt nur dann ein nichtverschwindendes Ergebnis, wenn $m = m'$ ist und wenn man nur die Sinusfaktoren bzw. nur die Cosinusfaktoren miteinander kombiniert. Die Integration über θ fordert dann, wegen der Orthogonalitätseigenschaften der zugeordneten Kugelfunktionen, auch $n = n'$. Es wird also

$$\int_r (v_{(\lambda)}^{*p q})^2 dr = \pi \sum_{m,n} [(A_{(\lambda)m}^{*p q n})^2 + (B_{(\lambda)m}^{*p q n})^2] \int_r \frac{1}{r} (I_{n+\frac{1}{2}})^2 r^2 dr. \quad (8,2)$$

Die Berücksichtigung der übrigen Terme von (8,1) liefert als Gesamtergebnis

$$\int_r \frac{1}{2} \sum_{p,q} \overline{(v_{(k)}^{*p q})^2} dr = \frac{\pi k^2}{4} \sum_{p,q} \sum_{\lambda} \sum_{m,n} \lambda^2 (\alpha_{(\lambda)m}^{*p q n})^2 \int_r \frac{1}{r} (I_{n+\frac{1}{2}})^2 r^2 dr \quad (8,3)$$

mit

$$(\alpha_{(\lambda)m}^{*p q n})^2 = (A_{(\lambda)m}^{*p q n})^2 + (B_{(\lambda)m}^{*p q n})^2 + (A_{(\lambda)m}^{*\prime p q n})^2 + (B_{(\lambda)m}^{*\prime p q n})^2. \quad (8,4)$$

Die asymptotische Form von $I_{n+\frac{1}{2}}$ für große r ist durch

$$I_{n+\frac{1}{2}} (\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \cos \left(\zeta - \frac{n+1}{2} \pi \right) + \dots$$

gegeben. Es wird also

$$\frac{1}{r} (I_{n+\frac{1}{2}})^2 = \frac{1}{2 \lambda k} \cdot \frac{1}{r^2} + \dots$$

Danach enthält (8,3) den divergierenden Term

$$\frac{1}{8} \left[\sum_{p,q} \sum_{\lambda} \sum_{m,n} \lambda (\alpha_{(\lambda)m}^{*p q n})^2 \right] \int_r \frac{1}{r^2} r^2 dr.$$

Dieser Term wird nur dann verschwinden, wenn die eckige Klammer gleich Null wird. Diese aber enthält keine negativen Terme, so daß sie nur dann ver-

schwinden wird, wenn sämtliche Koeffizienten A^*, B^*, A^{**} und B^{**} verschwinden. Dann wird aber nach (5,6) auch

$$v^{*\mu\nu} = 0. \quad (8,5)$$

Somit haben wir gefunden: Die notwendige Bedingung für ein im Unendlichen nicht unbeschränkt wachsendes \bar{w}^{44} ist, daß $v^{\mu\nu}$ durch die zu (7,2) führende Transformation (7,1) wegtransformiert wird. Ein solches $v^{\mu\nu}$ entspricht aber ersichtlich einem verschwindenden Krümmungstensor. Jedes $v^{\mu\nu}$ mit nicht verschwindendem Krümmungstensor wird zur Folge haben, daß das aus (5,7) berechnete \bar{w}^{44} im Unendlichen logarithmisch divergiert, und muß daher wegen der Grenzbedingung (1,2) ausgeschlossen werden.

Eliminiert man nun die Größen $v^{\mu\nu}$ mit Hilfe der Transformation (7,1), so werden die Größen $w^{*\mu\nu}$ als erste in der Entwicklung von $g^{\mu\nu}$ erscheinen. Ferner kann man ohne Schwierigkeit zeigen, daß sich die Transformation (7,1) in zweiter Näherung derart erweitern läßt, daß auch die Koordinatenbedingung $w_{,\nu}^{*\mu\nu} = 0$ erfüllt wird. Damit wird aber $w^{*\mu\nu}$ die Rolle des früheren $v^{\mu\nu}$ übernehmen. Daher wird man dann nach derselben Methode beweisen können, daß auch $w^{*\mu\nu}$ wegtransformierbar sein muß. Und zwar läßt sich diese Schlußfolgerung auch dann aufrechterhalten, wenn nach der zur Eliminierung von $v^{\mu\nu}$ führenden Koordinatentransformation Terme 3. Ordnung übrigbleiben: Man bemerke, daß in einem solchen Falle die rechten Seiten der Gleichungen für die Terme 4. Ordnung nur die Quadrate der Größen $w^{*\mu\nu}$ enthalten können, d. h. so beschaffen sind, als ob es keine Terme 3. Ordnung gäbe. Ähnlich wird man auch zu höheren Näherungsstufen fortschreiten können und somit zu folgendem Ergebnis gelangen: Es gibt keine nicht-triviale (d. h. von der Minkowskischen Metrik wesentlich verschiedene) singulitätenfreie Lösung der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, die in der Zeit periodisch ist und ein im ganzen Raum schwaches Gravitationsfeld darstellt.

Die hier entwickelte Methode läßt sich auch dann verwenden, wenn man in dem allgemeinen Ausdruck von $v^{\mu\nu}$, vgl. (5,4) und (5,5), nur die zu r^n proportionalen Terme von (5,5) unterdrückt. Diese Verallgemeinerung, durch die man auch die Frage nach der Existenz eines allgemeineren (nicht im ganzen Raum schwachen) singulitätenfreien periodischen Feldes sowie eines singulären periodischen Feldes beantworten kann, wird den Inhalt einer zweiten Arbeit bilden.

Berlin, Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 15. Mai 1957.

Zur Abhängigkeit der Ionenleitfähigkeit des Silberbromids von der Vorgeschichte des Kristalls

Von Manfred Höhne

Mit 16 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Der Einfluß der Vorgeschichte von AgBr-Kristallen auf die Ionenleitfähigkeit wurde zwischen 20° C und 200° C mit Gleich- und Wechselstrom untersucht. Besondere Aufmerksamkeit galt der Einwirkung des Luftsauerstoffs.

Sauerstoff diffundiert bei hoher Temperatur in das AgBr-Gitter ein. Die dadurch bedingte Erhöhung der Leitfähigkeit bei Zimmertemperatur ist besonders stark in abgeschreckten Kristallen. Die zusätzliche Leitfähigkeit klingt während Lagerung bei Zimmertemperatur ab. Bei Belichtung sinkt die zusätzliche Leitfähigkeit ebenfalls rasch ab. Vergleichsmessungen an S- und Se-dotierten sowie an abgeschreckten und zusätzlich plastisch verformten Kristallen stützen einen Deutungsversuch, nach dem das langsame Abklingen als Gleichgewichtseinstellung von Störstellenkonzentrationen zu verstehen ist und als vorherrschende Stromträger bei Zimmertemperatur und darüber Silberionen auf Zwischengitterplätzen anzunehmen sind. Für spezielle Eigenschaften der sauerstoff-dotierten Kristalle fehlt noch eine befriedigende Erklärung.

1. Einleitung

In einer kurzen Mitteilung zur elektrischen Störleitung in Halogensilber-Einkristallen ordnet Matejec¹⁾ dem Leitfähigkeitsbereich, der sich dem Bereich der von der Vorgeschichte unabhängigen Eigenleitung nach tieferen Temperaturen hin anschließt, als Stromträger Silberionenlücken zu. Diese Mitteilung gibt den Anlaß, eigene, bisher unveröffentlichte Messungen an AgBr zwischen 200° C und 20° C nachzutragen. Diesen Messungen und den daraus gezogenen Schlüssen zufolge ist die erwähnte Zuordnung nicht für Silberhalogenide schlechthin, sondern allenfalls unter Voraussetzung bestimmter Vorbehandlung der Kristalle möglich.

Die vorliegende Untersuchung hat das Ziel, verschiedene Einflüsse der Vorbehandlung auf die strukturempfindliche Leitung des AgBr festzustellen. Besondere Aufmerksamkeit wird der Einwirkung des Luftsauerstoffs gewidmet, zumal da die aktive Rolle des Sauerstoffs bei der Photochemie der Silberhalogenide nach neueren Untersuchungen (z. B. Clark und Mitchell²⁾) wieder ins Blickfeld gerät.

¹⁾ R. Matejec, Naturwiss. 43, 539 (1956).

²⁾ P. V. Mc D. Clark and J. W. Mitchell, J. photogr. Science 4, 1 (1956).

2. Experimentelles

21. Kristallherstellung

AgBr wurde nach dem bereits bei Teltow³⁾ genauer beschriebenen Verfahren gewonnen: Fällung von AgNO_3 mit doppelt destillierter Bromwasserstoffsäure, Waschen mit destilliertem Wasser, dem etwas Brom zugesetzt war, und Trocknen bei etwa 120°C . Das Pulver wurde in Supremaxglasröhren unter Stickstoff zu polykristallinen Halbzylindern (Korndurchmesser etwa 1 mm) geschmolzen, die im folgenden kurz als „Kristall“ bezeichnet werden. Zusätze wurden gegebenenfalls der Schmelze beigefügt und durch mehrtägiges Tempern knapp unter dem Schmelzpunkt homogenisiert. An den Endflächen der Halbzylinder ließen sich Elektroden aus Silberblech durch kurzes Erhitzen anschmelzen.

22. Meßmethoden

Zur Widerstandsmessung dienten Gleichstrom sowie Wechselstrom von 50 Hz und 800 Hz. Das gestattete zum einen die Abschätzung der Blindkomponente des Kristallwiderandes. Zum anderen wurde die bei höheren Temperaturen bewährte (s. z. B. Teltow⁴⁾) Gleichstrommessung bei tieferen Temperaturen durch die dort empfindlichere Wechselstrommethode ergänzt.

Die Bestimmung des Gleichstromwiderstands erfolgte in einer Wheatstoneschen Brücke. Um größere Stromleistungen im Kristall und Silberausscheidung (Tubandtfäden) zu vermeiden, wurden nur kurze Spannungsstöße erzeugt.

Der Wechselstromwiderstand wurde in einer Spannungsteilerschaltung bestimmt. Der Kristall und ein um jeweils etwa drei Größenordnungen kleinerer bekannter Widerstand waren in Reihe geschaltet; die Gesamtspannung und die über dem bekannten Widerstand abfallende Teilspannung wurden mit Röhrenvoltmetern gemessen.

Zur Temperaturmessung diente ein Thermoelement in Kompensationsschaltung.

3. Meßergebnisse

31. Mechanische Verformung

Da über die Abhängigkeit der Leitfähigkeit des Silberbromids von plastischer Verformung bereits ausführliche Untersuchungen von Johnston⁴⁾ vorlagen, sollten orientierende Messungen lediglich den möglichen Anteil mechanischer Verformungen an der strukturempfindlichen Leitung für das von uns untersuchte Material abschätzen.

Unterhalb von etwa 50°C verursacht die Korngrenzenleitung eine gegenüber Einkristallen höhere Grundleitfähigkeit. Wenn auch deshalb die Absolutwerte der festgestellten Leitfähigkeits erhöhung bei Zimmertemperatur selbstverständlich höher lagen als die von Johnston an Einkristallen erzielten Ergebnisse, so stimmte doch die relative Leitfähigkeitszunahme um den Faktor 10 bei einer relativen Längenänderung um etwa 25% mit den Angaben von Johnston überein. Bei unseren im folgenden zu schildernden Untersuchungen wurde mechanische Beanspruchung der Kristalle (von einer besonders erwähnten Ausnahme abgesehen) vermieden. Eine die Leitfähigkeit beeinflussende plastische Verformung konnte also allenfalls beim Abschrecken vom Erstarrungspunkt auf Zimmertemperatur durch Haften der Präparate an der Glaswand auftreten, durfte dann aber 2,4% relater Längenänderung nicht überschreiten, entsprechend der bekannten thermischen Ausdehnung des AgBr zwischen 20°C und Schmelztemperatur. Die von Johnston festgestellte Proportionalität von relativer Längenänderung und Leitfähigkeitszuwachs berechtigt zu linearer Interpolation. Danach entspricht der maximalen Längenänderung von 2,4% eine Erhöhung der Leitfähigkeit auf etwa das Doppelte. Die in der Größenordnung der Faktoren 10 bis 100 liegenden Effekte der strukturempfindlichen Leitung sind also nur zu einem geringen Teil mit mechanischen Verformungen zu erklären.

32. Einfluß der (inerten bzw. reduzierenden) Gasphase

Die Kristalle wurden in den betreffenden Gasen getempert, d. h. bei hoher Temperatur (400°C) gelagert. Als inertes Schutzgas gegen das Eindringen

³⁾ J. Teltow, Ann. Physik (6) 5, 63, 71 (1949).

⁴⁾ W. G. Johnston, Physic. Rev. 98, 1777 (1955).

von Luft diente gegebenenfalls Stickstoff, da die Leitfähigkeit der so geschützten Kristalle keine Abweichungen von in Vakuum getemperten und gemessenen zeigte.

Von den erhaltenen Ergebnissen sei hier nur vermerkt, daß in Wasserstoff getemperte Kristalle unabhängig von der Temperzeit ($1/2$ h bis 13 h) eine nur geringe relative Leitfähigkeits erhöhung — bei Zimmertemperatur etwa 1,6fach — gegenüber „reinen“, d. h. in Schutzgas getemperten Kristallen aufwiesen. Das erklärt sich aus der Bildung einer sichtbaren, hauchdünnen Silberschicht auf dem Präparat, die infolge ihrer lockeren Struktur nur schlecht leitet, aber die weitere Reduktion verhindert.

33. Einfluß von Sauerstoff

Die Kristalle wurden nach 13stündiger Temperung in dem betreffenden Gas bei 400°C langsam abgekühlt (Temperatur nach etwa 1 h 250°C , nach etwa 6 h 80°C) und dabei auf ihre Leitfähigkeit hin untersucht. In den Abb. 1—4 ist die Leitfähigkeit in logarithmischem Maßstab über $1/T$ aufgetragen. In diese Abbildungen ist jeweils die Gerade eingezeichnet, nach der die Leitfähigkeit verlaufen müßte, wären lediglich thermisch erzeugte Stromträger einer Sorte in reiner Volumenleitung für die Leitfähigkeit verantwortlich. Oberhalb von etwa 120°C liegen die Meßwerte innerhalb der Fehlergrenzen auf dieser Geraden, d. h. sie erfüllen das für die Eigenleitung gültige Exponentialgesetz. Der von Abb. 1 zu Abb. 4 steigende Sauerstoffeinfluß offenbart sich im Verlauf der Kurven. Während bei den in Stickstoff getemperten Kristallen (Abb. 1) die Leitfähigkeit in einem Temperaturbereich sogar unter die Gerade der Eigenleitung absank⁵⁾, komensierte sich dieser die Leitfähigkeit erniedrigende Einfluß bei den die in Luft getemperten (Abb. 2) eben mit der Erhöhung durch den Luftsauerstoff. Die Einwirkung ist noch stärker bei Temperung im reinen Gas (Abb. 3) und am stärksten bei Kristallen, an deren Oberfläche vor der Temperung in Sauerstoff durch kurzzeitige Reduktion in Wasserstoff ein Silberüberschuß erzeugt wurde, der die Einwirkung des Sauerstoffs offenbar begünstigt (Abb. 4). Daß dabei die Reduktion selbst keine nennenswerte Erhöhung der Leitfähigkeit bewirkt, ist aus der Bemerkung am Ende des vorigen Abschnitts ersichtlich.

Die Abb. 1—4 zeigen ferner, daß mit steigendem Sauerstoffeinfluß die für die reine Substanz verständliche (s. z. B. Friauf⁶⁾) geringe Aufspaltung der Werte für Gleichstrom und Wechselstrom von 50 Hz und 800 Hz kleiner wird. Der durch die Sauerstoffeinwirkung bedingte Leitfähigkeitszuwachs ist also überwiegend Ohmscher Natur.

34. Eindringtiefe des Sauerstoffs

Die bisher angegebenen Leitfähigkeiten stellen Mittelwerte für den ganzen Kristall dar. In Wirklichkeit wird aber die Leitfähigkeit in mit der Gasphase reagierenden Kristallen eine Funktion des Abstandes von der Oberfläche sein. Um die Dicke dieser Randschicht angenähert festzustellen, empfahl es sich, die Oberfläche schichtweise zu entfernen und jeweils danach

⁵⁾ Diese Erscheinung ist nach Teltow²⁾ leicht erklärbar, wenn man geringe Verunreinigung mit zweiwertigen Kationen annimmt.

⁶⁾ R. J. Friauf, J. chem. Physics **22**, 1829 (1954).

die Mittelwerte der Leitfähigkeit des Restkristalls aus der Messung — bei Zimmertemperatur — zu gewinnen. Gut ließ sich die Oberfläche mit Natriumthiosulfatlösung abätzen. Für die Vermeidung von Nebenwirkungen sorgte anschließendes gründliches Waschen des Kristalls in destilliertem Wasser. Messung an reinem, d. h. in Stickstoff getempertem AgBr bestätigte, daß

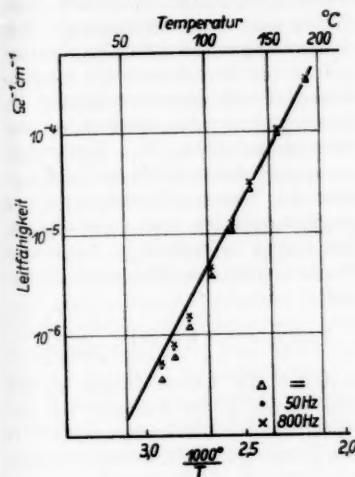


Abb. 1

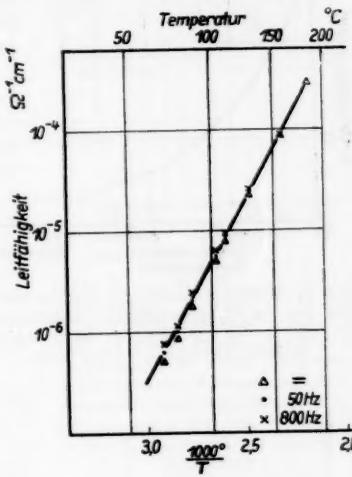


Abb. 2

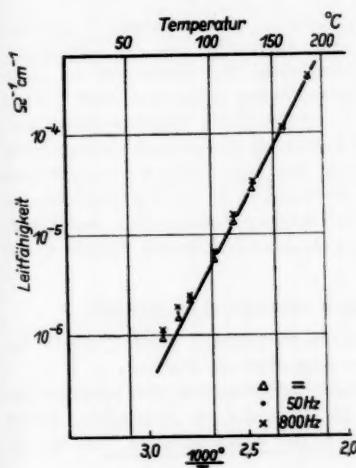


Abb. 3

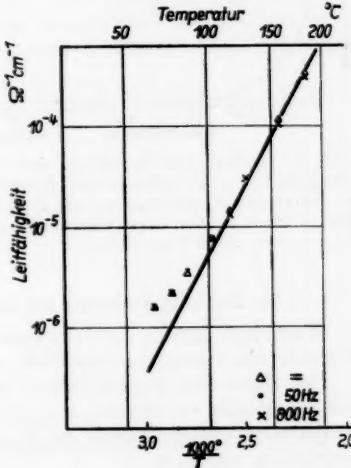


Abb. 4

Abb. 1–4. Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit für Gleichstrom und Wechselstrom von 50 Hz und 800 Hz. Vorher 13 h bei 400°C getempert: in N₂ (Abb. 1), in Luft (Abb. 2), in O₂ (Abb. 3), in O₂ nach Reduktion (Abb. 4)

durch den Ätzprozeß selbst die Leitfähigkeit nicht verändert wurde. Die Dicke der abgeätzten Schicht wurde aus dem Gewichtsverlust des Kristalls er-schlossen. Das Ergebnis dieser Meßreihe an Kristallen, die 13 h bei 410°C in Sauerstoff getempert worden waren, zeigt Abb. 5. Auch diese Werte sind noch Mittelwerte über den jeweiligen Restkristall, gestalten jedoch die Berechnung der tatsächlichen Leitfähigkeitsverteilung in Abhängigkeit vom Abstand von der Oberfläche (Abb. 6). Unterstellt man, daß die zusätzliche Leitfähigkeit der Sauerstoffkonzentration c proportional ist, und approximiert die Kurve in Abb. 6 in bekannter Weise durch das Bild einer Funktion

$$c(d, t) = C \left[1 - \Phi \left(\frac{d}{2\sqrt{Dt}} \right) \right],$$

wobei C die Konzentration an der Oberfläche, d den Abstand von der Oberfläche, t die Diffusionszeit, D den Diffusionskoeffizienten und Φ die

$$\text{Gaußfunktion } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

bedeuten, so kann man D abschätzen. Es ergibt sich als Diffusionskoeffizient für Sauerstoff in polycristallinem AgBr bei 410°C $D \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. Das erscheint vernünftig, da die geringe Abweichung von den von Teltow⁷⁾ ermittelten Werten für S - und J -Ionen durch den kleinen Ionenradius des Sauerstoffs eine Erklärung finden kann.

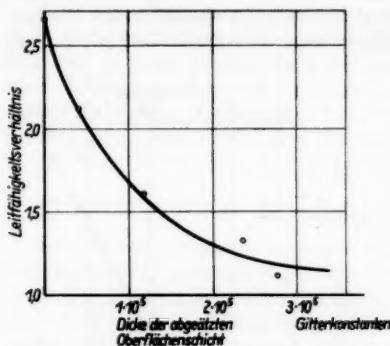


Abb. 5. Mittleres Verhältnis der Leitfähigkeit von in O_2 getemperten Kristallen zu der von in N_2 getemperten nach schichtweise Abätzen der Oberfläche

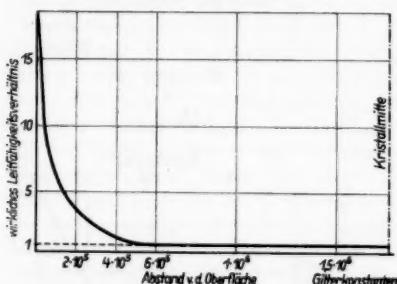


Abb. 6. Tatsächliches Verhältnis der Leitfähigkeit von in O_2 getemperten Kristallen zu der von in N_2 getemperten als Funktion des Abstandes von der Oberfläche (aus Abb. 5 errechnet)

35. Zeitliche Änderung der Leitfähigkeit abgeschreckter Kristalle

Wesentlich höhere Leitfähigkeiten konnten festgestellt werden, wenn die Kristalle nicht langsam abgekühlt, sondern abgeschreckt wurden.

Um allgemeine Eigenschaften zweiwertiger Anionen von den spezifischen des Sauerstoffs zu trennen, empfahl sich die Messung an Kristallen, denen die oft verwendeten Zusätze Ag_2S und Ag_2Se in der Konzentration 0,01 Mol-% beigegeben waren.

Zur Trennung von Volumen- und Oberflächen-Effekt waren Untersuchungen an Kristallen gedacht, denen in der Schmelze Ag_2O -Pulver zugesetzt war.

⁷⁾ J. Teltow, Z. Elektrochem. 56, 767 (1952).

Vor dem Abschrecken wurden alle Kristalle bei 400°C getempert, die sauerstoffhaltigen in Sauerstoff, die schwefel- und selenhaltigen in Stickstoff. Das Abschrecken geschah durch Werfen in kaltes Wasser. Die Kristalle wurden dann getrocknet und in die Meßvorrichtung eingebracht. Die Manipulationen mußten im Dunkeln bzw. bei Rotlicht geschehen, da in diesen Fällen Licht die Leitfähigkeit stark beeinflußt, wie unten gezeigt wird.

Freilich ist den im folgenden anzugebenden Zahlenwerten — besonders beim Sauerstoff — nur bedingter Wert beizumessen: Trotz scheinbar gleicher Versuchsbedingungen wichen die gemessenen Leitfähigkeiten meist um etwa 50% voneinander ab (individuelle Eigenschaften der Kristalle, unterschiedliche Güte des Abschreckprozesses). Trotzdem lassen sich im Rahmen dieser Fehlernähe quantitative Aussagen machen. Das qualitative Verhalten war stets reproduzierbar.

Nach dem Abschrecken wurde die Leitfähigkeit der Kristalle in Abhängigkeit von der Lagerungsdauer bei 20°C verfolgt. Alle so hergestellten Kristalle hatten gemeinsam: Nach dem Abschrecken fiel die Leitfähigkeit im Dunkeln deutlich ab. Durch Bestrahlung mit Tageslicht sank die Leitfähigkeit weiter rasch stark ab und erreichte die Leitfähigkeit des in Stickstoff getemperten, also des maximal reinen Kristalls. Das gilt sowohl

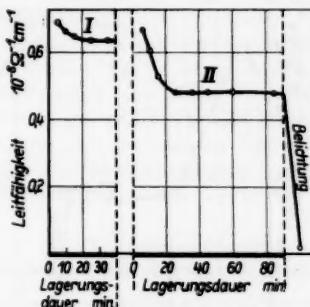


Abb. 7. Leitfähigkeit eines in O_2 getemperten Kristalls nach dem Abschrecken von 400°C auf Zimmertemperatur in Abhängigkeit von Lagerungsdauer und Belichtung. Nach Vorgang I erneut bei 400°C getempert und abgeschreckt (Lagerungsvorgang II). Anschließend Belichtung. Nullpunkt aller Zeitskalen: Abschrecken

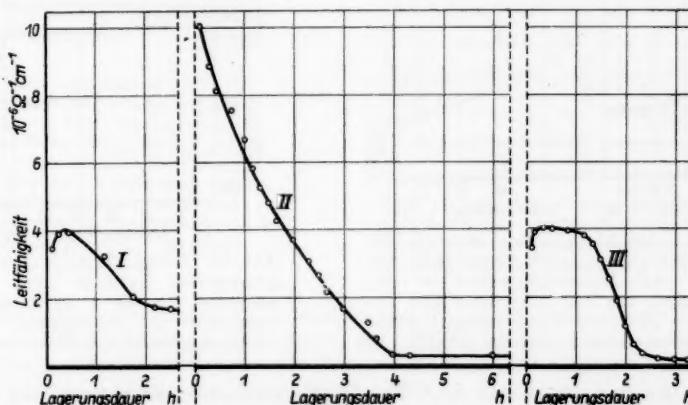


Abb. 8. Leitfähigkeit eines nach Reduktion in O_2 getemperten Kristalls nach Abschrecken von 400°C auf Zimmertemperatur in Abhängigkeit von der Lagerungsdauer. Nach Vorgang I und II jeweils erneut bei 400°C getempert und abgeschreckt

für die in Sauerstoff getemperten (Abb. 7) und die nach Schaffung eines Silberüberschusses in Sauerstoff getemperten (Abb. 8) wie für die mit Ag_2O (Abb. 9), Ag_2S (Abb. 10) bzw. Ag_2Se (Abb. 11) dotierten Kristalle. Sogar

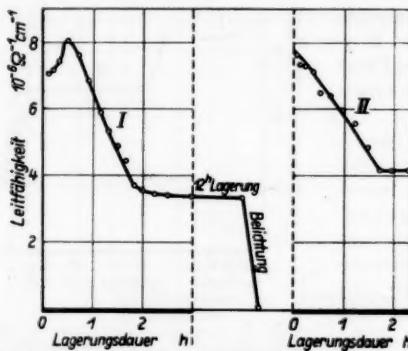


Abb. 9. Leitfähigkeit eines Kristalles, dem Ag_2O -Pulver in der Schmelze zugesetzt war, nach dem Abschrecken von 400°C auf Zimmertemperatur in Abhängigkeit von Lagerungsdauer und Belichtung

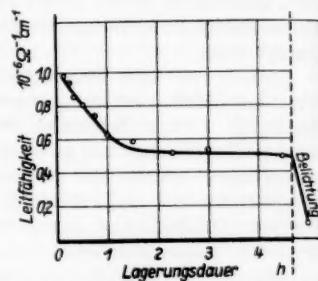


Abb. 10. Leitfähigkeit eines Kristalls mit 0,01 Mol-% Ag_2S nach dem Abschrecken von 400°C auf Zimmertemperatur in Abhängigkeit von Lagerungsdauer und Belichtung

die in Stickstoff getemperten Kristalle zeigten gleichfalls das beschriebene Verhalten, wenn auch in weit schwächerem Maße (Abb. 12).

Die anfängliche Leitfähigkeit — etwa 10 Minuten nach dem Abschrecken — war am stärksten bei den nach Vor-Reduktion in Sauerstoff getemperten

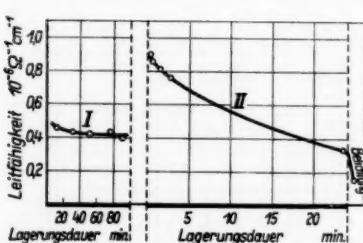


Abb. 11. Leitfähigkeit eines Kristalls mit 0,01 Mol-% Ag_2Se nach Abschrecken von 400°C auf Zimmertemperatur in Abhängigkeit von Lagerungsdauer und Belichtung. Nach Lagerungsvorgang I erneut getempert und abgeschreckt (II)

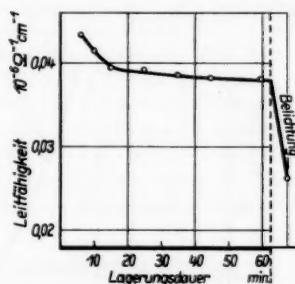


Abb. 12. Leitfähigkeit eines in N_2 getemperten Kristalls nach Abschrecken von 400°C auf Zimmertemperatur in Abhängigkeit von Lagerungsdauer und Belichtung

Kristallen und denen mit Ag_2O -Zusatz gleichermaßen; sie betrug etwa das Hundertfache der des in Stickstoff getemperten und abgeschreckten Kristalls. Die ohne Vor-Reduktion in Sauerstoff getemperten Kristalle leiteten recht unterschiedlich, im allgemeinen etwa 10- bis 15mal so gut wie abgeschreckte

reine Kristalle, die mit Ag_2S -Zusatz etwa 20mal, die mit Ag_2Se -Zusatz etwa 5- bis 10mal.

Am einfachsten sind die Verhältnisse bei den mit Schwefel und Selen dotierten Kristallen: Die zeitliche Abnahme der Leitfähigkeit wurde mit der Zeit schwächer, erfolgte aber über lange Zeit beständig.

Die mit Sauerstoff dotierten Kristalle verhielten sich fast alle — unabhängig davon, wie der Sauerstoff eingebracht worden war — etwas anders. Häufig blieb die Leitfähigkeit nach dem Abschrecken eine Weile — meist ungefähr eine halbe Stunde — konstant oder stieg gar an, bevor das rasche Absinken eintrat. Dabei handelte es sich nicht um eine bestimmten Kristall-individuen eigentümliche Eigenschaft; denn der Leitfähigkeitsanstieg wurde am gleichen Kristall bei scheinbar gleicher Behandlung einmal beobachtet, einmal nicht (Abb. 8).

36. Zeitliche Änderung der Leitfähigkeit abgeschreckter und gepreßter Kristalle

Wieder wurden die Kristalle bei 400°C getempert, in der oben beschriebenen Weise abgeschreckt und einer Leitfähigkeitsmessung in Abhängigkeit von der Lagerungsdauer unterzogen. Danach ließ man die Kristalle erneut 20 Minuten bei 400°C tempern und schreckte sie ab. Vor der Beobachtung der Zeitabhängigkeit der Leitfähigkeit wurden die Kristalle nun aber sofort nach dem Abschrecken noch stark plastisch verformt, und zwar durch Zusammenpressen auf etwa die Hälfte ihrer ursprünglichen Dicke.

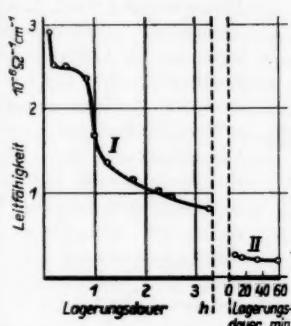


Abb. 13. Leitfähigkeit eines in O_2 getemperten Kristalls in Abhängigkeit von der Lagerungsdauer. Behandlung des Kristalls vor der Lagerung: I Temperung bei 400°C , Abschrecken auf Zimmertemperatur; II Temperung bei 400°C , Abschrecken auf Zimmertemperatur, plastische Verformung

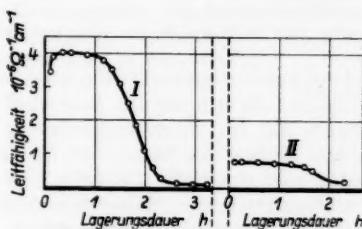


Abb. 14. Leitfähigkeit eines nach Reduktion in O_2 getemperten Kristalls in Abhängigkeit von der Lagerungsdauer. Behandlung vor der Lagerung wie in Abb. 13

Es zeigte sich nun, daß die Leitfähigkeit zu Beginn der Beobachtung bereits einen deutlich niedrigeren Wert hatte; die zeitliche Abnahme war schwächer.

Temperte man erneut aus und schreckte ab, ohne nachträglich zu pressen, so erhielt man wieder das gleiche Ergebnis wie bei dem ersten Versuch (Kurven I).

Dieses Verhalten wiesen übereinstimmend alle untersuchten Kristalle auf, die in Sauerstoff getempert (Abb. 13), die nach voraufgegangener Reduktion

in Sauerstoff getemperten (Abb. 14), die mit S-Zusatz (Abb. 15) und die mit Se-Zusatz (Abb. 16).

4. Diskussion der Meßergebnisse

Neben der Bildung der Kornstruktur und neben mechanischen Verformungen spielt in der Vorgeschichte der Kristalle das umgebende Gas bei der Temperung für die Leitfähigkeit eine wichtige Rolle. Stasiw und Teltow hatten schon früher darauf hingewiesen⁸⁾, daß Silberbromid in geschmolzenem Zustand vom Luftsauerstoff angegriffen wird, wobei sich eine sehr verdünnte Lösung von Ag_2O in AgBr bildet. Sie hatten aus dieser Oxydation resultierende Eigenschaften — wie das Haften an Glas — untersucht und auf Leitfähigkeitsänderungen der Kristalle unter 200°C aufmerksam gemacht.

Die vorliegende Untersuchung hat gezeigt, daß die Leitfähigkeit je nach den Vorbedingungen mehr oder minder beträchtlich auch durch Sauerstoffeinwirkung auf die feste Phase erhöht wird. Der Sauerstoff diffundiert zwar in das Gitter ein, beschränkt aber bei begrenzter Temperzeit seinen Einfluß auf eine Oberflächenschicht, die durch die kleine Diffusionsgeschwindigkeit gegeben ist. Bei 13stündiger Temperung beträgt die Schichtdicke

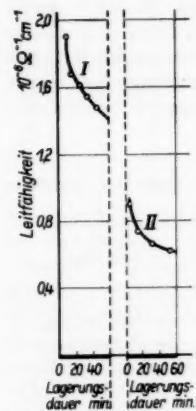


Abb. 15. Leitfähigkeit eines Kristalls mit 0,01 Mol-% Ag_2S in Abhängigkeit von der Lagerungsdauer. Behandlung vor der Lagerung wie in Abb. 13

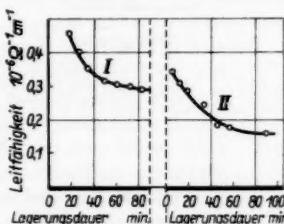
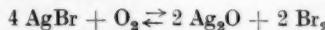


Abb. 16. Leitfähigkeit eines Kristalls mit 0,01 Mol-% Ag_2Se in Abhängigkeit von der Lagerungsdauer. Behandlung vor der Lagerung wie in Abb. 13

einige hunderttausend Gitterkonstanten (Gitterkonstante von AgBr bei 20°C : $5,76 \text{ \AA}$). Da sich die mit Sauerstoff dotierten Kristalle qualitativ ähnlich wie solche mit ins Gitter eingebautem S- oder Se-Zusatz verhalten, kann man einen Einbau des Sauerstoffs ins Anionenteilgitter vermuten. Diese Vermutung wird durch die Tatsache, daß an den Kristallen mit vorher erzeugtem stöchiometrischem Silberüberschuß der Sauerstoffeinfluß größer ist, verstärkt; denn da das Gleichgewicht



sehr stark auf der Seite des freien Sauerstoffs liegt, kann dieser sich an der Kristalloberfläche nur ionisieren und als Ag_2O ins Gitter eindringen, wenn beständig Brom abdiffundiert oder wenn er durch freies Silber gebunden wird.

Bei der Deutung des Sauerstoffeinflusses auf die Leitfähigkeit ist zu beachten, daß die Kristalle mit erhöhter Leitfähigkeit sich trotz der langsamen Abkühlung noch nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Das folgt daraus, daß die Leitfähigkeit während Lagerung bei konstanter Temperatur im strukturempfindlichen Bereich abnimmt. Die Einstellung des Gleich-

⁸⁾ O. Stasiw u. J. Teltow, Z. anorg. Chem. 257, 109 (1948).

gewichts kann deutlich an den abgeschreckten Kristallen verfolgt werden. Grundsätzlich ergibt die multiplikative Zusammensetzung der Leitfähigkeit aus Stromträgerkonzentration und Beweglichkeit zwei Deutungsmöglichkeiten für das zeitliche Abklingen:

1. Durch das Abkühlen oder Abschrecken ist die Konzentration der im Kristall vorhandenen Stromträger größer, als der jeweiligen Temperatur des Kristalls zukommt. Sie nimmt mit der Einstellung des thermodynamischen Gleichgewichts ab.

2. Beim Abkühlen oder Abschrecken ist die Beweglichkeit stark erhöht worden, beispielsweise durch innere mechanische Verspannung des Kristalls. Diese Beweglichkeitserhöhung bildet sich — gemäß den experimentellen Ergebnissen von Johnston⁴⁾ — im Laufe der Zeit zurück.

Für diese Deutung spricht unter anderem die Tatsache, daß in der reinen Substanz ebenfalls nach dem Abschrecken die Leitfähigkeit abklingt, wenn auch die Beträge der Leitfähigkeitserhöhung von Anfang an sehr klein sind.

Die beiden Möglichkeiten seien nacheinander diskutiert.

Zu 1.

Die Fehlstellenkonzentrationen sind — wie Stasiw und Teltow gezeigt haben⁹⁾ — im thermodynamischen Gleichgewicht durch Massenwirkungsgleichungen miteinander verknüpft. Berücksichtigen wir, daß die geladenen Störstellen zu neutralen Komplexen assoziieren können und daß die Doppel-lücken mit der Oberfläche des Kristalls (innere und äußere) im Austausch stehen (Gl. (II)), und bezeichnen wir in der üblichen Schottkyschen Schreibweise die Gitterkonzentration der Silberionen auf Zwischengitterplatz (Ag_\square^0) mit x_\square^0 , die der Silberionenlücken (Ag_\square^-) mit x_\square^- , die der Bromionenlücken (Br_\square^-) mit x_B^- , die der zweiwertigen Fremdanionen ($\text{S}'_G^-, \text{Se}'_G^-, \text{O}'_G^-$) mit x_S^- , die der Doppellücken ($[\text{Ag}_\square^0 \text{Br}_\square^-]$) mit $x_{\square B}^-$, die der Assoziate Zwischengitterkation-Fremdion ($[\text{Ag}_\square^0 \text{S}'_G^-]$, usw.) mit $x_{\square S}^-$, die der Assoziate Bromionenlücke-Fremdion ($[\text{Br}_\square^- \text{S}'_G^-]$, usw.) mit x_{BS}^- , dann gelten für das reine Silberbromid die Massenwirkungsbeziehungen (s. z. B. Stasiw¹⁰⁾):

$$x_\square^0 x_\square^- = k_1, \quad (\text{I})$$

$$x_\square^- x_B^- = k_2, \quad (\text{II})$$

$$\frac{x_\square^- x_S^-}{x_{\square B}^-} = k_3, \quad (\text{III})$$

denen für das zweiwertige Fremdionen enthaltende Salz noch

$$\frac{x_\square^0 x_S^-}{x_{\square S}^-} = k_4 \quad (\text{IV})$$

und

$$\frac{x_B^- x_S^-}{x_{BS}^-} = k_5 \quad (\text{V})$$

hinzuzufügen sind. Ferner ist die Gesamtmenge des Zusatzes konstant:

$$x_S^- + x_{\square S}^- + x_{BS}^- = y \quad (\text{VI})$$

⁹⁾ O. Stasiw u. J. Teltow, Ann. Physik [6] 1, 261 (1947).

¹⁰⁾ O. Stasiw, Z. Physik 127, 522 (1950).

und es gilt die Neutralitätsbedingung

$$x_{\odot} + x_B = x_{\square} + x_S. \quad (\text{VII})$$

Nach dem Abschrecken werden sich sofort alle die Gleichgewichte einstellen, an deren Reaktionen wenigstens ein schneller Partner beteiligt ist. Massenwirkungsgleichungen hingegen mit Reaktionspartnern, deren Diffusionsvorgänge sämtlich in der Größenordnung der Beobachtungszeit liegende Zeiten beanspruchen, haben ihre Gültigkeit verloren. Die träge Annäherung an den neuen Gleichgewichtszustand soll im folgenden versuchsweise einfach so beschrieben werden, daß die Konzentration des trügsten Reaktionspartners als Zeitfunktion vorgegeben wird.

Ag_{\odot} und Ag'_{\square} haben hohe Diffusionskoeffizienten (s. z. B. Teltow⁷⁾) selbst bei Zimmertemperatur. Zu den schnellen Reaktionspartnern können wir bei Zimmertemperatur ferner die Doppelstützen zählen. Das geht aus theoretischen Untersuchungen von Dienes¹¹⁾ an Alkalihalogeniden hervor, ferner aus der von photochemischen Untersuchungen her bekannten Tatsache, daß sich in reinen Silberhalogeniden Schottky-Fehlordnung nicht abschrecken läßt. Br_{\square} und Anionen hingegen haben um mehrere Größenordnungen kleinere Diffusionskoeffizienten, desgleichen ihre Assoziate.

Deshalb werden die Fehlstellenkonzentrationen nach dem Abschrecken durch das oben für thermodynamisches Gleichgewicht angegebene Gleichungssystem beschrieben, nur an Stelle der Gl. (V) tritt die Beziehung

$$x_{B,S} = F(t) \quad \text{mit} \quad F(t_2) > F(t_1) \quad \text{für} \quad t_2 > t_1. \quad (\text{Va})$$

Dabei trägt die Zeitfunktion $F(t)$ der Tatsache Rechnung, daß die Gleichgewichtskonzentration der Assoziaten $[\text{Br}'_{\square} \text{S}'_{\square}]$, $[\text{Br}'_{\square} \text{Se}'_{\square}]$ und $[\text{Br}'_{\square} \text{O}'_{\square}]$ bei Zimmertemperatur sicher größer ist als bei hoher Temperatur. Über die zeitliche Änderung der Konzentrationen der freien Br'_{\square} und der freien Fremd-anionen läßt sich zunächst keine Angabe machen, da diese über schnelle Partner mit anderen Assoziaten ($[\text{Ag}'_{\square} \text{Br}'_{\square}]$, $[\text{Ag}'_{\square} \text{S}'_{\square}]$ usw.) im Austausch stehen. Gl. (VI) bleibt bestehen, da in der Beobachtungszeit keine merkliche Ausscheidung von Sulfid und Selenid erfolgte.

Um Aufschluß über die zeitliche Konzentrationsänderung der vermutlichen Stromträger, der Ag_{\odot} bzw. der Ag'_{\square} , zu erhalten, errechnet man aus dem neuen Gleichungssystem die kubische Gleichung:

$$x_{\odot}^3 \left(1 + \frac{k_2 k_3}{k_1}\right) + x_{\odot}^2 k_4 \left(1 + \frac{k_2 k_3}{k_1}\right) - x_{\odot} [k_1 + k_4 (y - F(t))] - k_1 k_4 = 0.$$

Löst man diese Beziehung nach $F(t)$ auf, so sieht man, daß

$$\frac{dF(t)}{dx_{\odot}} = - \left(1 + \frac{2 x_{\odot}}{k_4}\right) \left(1 + \frac{k_2 k_3}{k_1}\right) - \frac{k_1}{x_{\odot}^2} < 0 \quad \text{für alle } x_{\odot} (> 0).$$

Es gibt also nur eine reelle Wurzel x_{\odot} , und es sinkt die Konzentration der Ag_{\odot} mit der Zeit, da $F(t)$ wächst. Für die Ag'_{\square} gilt wegen $x_{\square} = \frac{k_1}{x_{\odot}}$ die reziproke Beziehung. Da das Experiment eindeutig eine Abnahme der Leitfähigkeit nachweist, müssen nach unserer Deutung die Ag'_{\square} in dem sich an

¹¹⁾ G. J. Dienes, J. chem. Physics **16**, 620 (1948).

die Eigenleitung nach tieferen Temperaturen hin anschließenden Leitfähigkeitsbereich den Hauptteil des Stromes tragen.

Nach Teltow¹²⁾ ergibt sich das ohnehin schon für das zusatzfreie Salz aus dem Verhältnis der Beweglichkeiten (z. B. etwa 7 für 175° C). Durch Einbau zweiwertiger Anionen erhöht sich entsprechend (VII) der Stromanteil der Ag_\circ noch weiter.

Die Tatsache, daß bei Belichtung die Leitfähigkeit sinkt, erklärt sich zwanglos mit Stasiw¹³⁾: Neben Assoziaten fangen auch freie Bromionenlücken Photoelektronen ein. Auch durch Belichtung wird also die Konzentration x_B der Br_\square und damit die Leitfähigkeit verringert, da nach (I), (II) und (III) das Verhältnis

$$\frac{x_0}{x_B} = \frac{k_1}{k_2 k_3}$$

nur von der Temperatur abhängig ist.

Zu 2.

Gegen die Auffassung, daß das Abklingen der Leitfähigkeit auf die Rückbildung einer durch mechanische Verspannungen bedingten Leitfähigkeiterhöhung zurückzuführen ist, spricht vor allem die in den Abb. 13 bis 16 dargestellte Versuchsreihe. Wäre die Leitfähigkeiterhöhung, die nach dem Abschrecken beobachtet wird, durch die bei der thermischen Längenänderung des Kristalls auftretenden Verformungen zu erklären, dann müßte an zusätzlich gepreßten Kristallen der Leitfähigkeitszuwachs größer sein. Das Gegen teil ist der Fall.

Das läßt sich so verstehen: Durch die plastische Verformung werden Bezirke erhöhter Beweglichkeit im Kristall geschaffen, die oben angenommene Gleichgewichtseinstellung wird beschleunigt. Die dadurch hervorgerufene Konzentrationsverminderung der Stromträger ist so groß, daß die gewiß beträchtliche Vergrößerung der Beweglichkeit überwogen wird. Die Leitfähigkeit abgeschreckter und zusätzlich gepreßter Kristalle ist nach gleicher Lagerungszeit geringer als die von lediglich abgeschreckten Kristallen.

Wenn der Abklingvorgang auch an in Stickstoff getemperten Kristallen festgestellt wurde (Abb. 12), so kann daraus geschlossen werden, daß auch in Kristallen ohne gewollten Zusatz trotz sorgfältiger Behandlung merkliche Verunreinigungen enthalten sind.

Abschließend seien noch einige Bemerkungen gemacht zu den Besonderheiten, die der Sauerstoff gegenüber anderen zweiwertigen Anionen zeigt und für die noch keine befriedigende Erklärung gegeben werden kann: Erstens leiten die Sauerstoff enthaltenden Kristalle bei höchstens gleicher Zusatzkonzentration (eine gleicher Zusatzkonzentration entsprechende Menge Ag_\circ wurde zugegeben, doch ein Teil zersetze sich sofort in der Schmelze) nach dem Abschrecken wesentlich besser als solche mit S- oder Se-Zusatz. Zweitens geht dem starken Abklingen der Leitfähigkeit häufig ein relativ langer Zeitraum voran, in dem die Leitfähigkeit konstant bleibt oder gar ansteigt.

Diese Besonderheiten stehen möglicherweise mit der Tatsache in Zusammenhang, daß sich Sauerstoff schwer in das Silberbromidgitter einbaut. Daß sich der Einfluß des Sauerstoffs vorwiegend auf Oberflächenbezirke beschränkt wird durch mehrere Erscheinungen angedeutet: Zum einen wird durch höchstmöglichen Einbau von Silberoxyd in die geschmolzene Substanz — also zunächst ins ganze Volumen — keine höhere Leitfähigkeit verursacht als durch geeignete Temperung in Sauerstoffgas, bei der mit Sicherheit nur eine Randschicht beeinflußt wird. Der Sauerstoff scheidet sich also nach dem Erstarren offenbar teilweise wieder aus dem Gitter aus. Zum anderen fällt auf, daß die für die Leit-

¹²⁾ O. Stasiw, Z. Physik 138, 246 (1954).

fähigkeitserhöhung durch Sauerstoffzusatz verantwortlichen Stromträger vermutlich verschiedene Aktivierungsenergien besitzen. Diese Vermutung wird dadurch nahegelegt, daß die Leitfähigkeitserhöhung für höhere Sauerstoffkonzentrationen nicht bei höheren Temperaturen einsetzt, wie das bei einer einheitlichen Aktivierungsenergie zu erwarten wäre. Derartige unterschiedliche Aktivierungsenergien liegen in den Oberflächen- und Korngrenzenbezirken vor.

Die gegenüber S- und Se-Zusatz höhere Leitfähigkeit kann damit in Zusammenhang gebracht werden, daß der Sauerstoff an inneren Oberflächen und Korngrenzen Rand schichten bildet, so daß hohe Konzentrationen der Stromträger gerade in den Gebieten niedriger Aktivierungsenergien und damit hoher Beweglichkeiten anzunehmen sind. Damit könnte auch eine Deutung des anfänglichen Leitfähigkeitsanstieges versucht werden; denn diese gut leitenden Schichten bilden sich erst mit der Ausscheidung des Sauerstoffs aus dem Gittervolumen heraus.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche fördernde Diskussionen danke ich Herrn Prof. O. Stasiw und Herrn Dr. J. Teltow recht herzlich.

Berlin-Adlershof, Institut für Kristallphysik.

Bei der Redaktion eingegangen am 24. Juni 1957.

Namenregister 1957

6. Folge, Band 19—20

A

- Andrä, W., Untersuchung des Ummagnetisierungsvorgangs bei Alnico hoher Koerzitivkraft mit Hilfe der Pulvermustertechnik **19**, 10.
Andrä, W., vgl. Perthel, R., **19**, 265.
Auth, J., Zur Diffusion der Ladungsträger in Photoleitern unter Berücksichtigung von Lokalniveaus **20**, 210.

B

- Barwich, H., Zur Frage der Annäherung einer idealen Isotopentrennungskaskade durch eine treppenförmig abgestufte Kaskade im verlustfreien Fall und bei Berücksichtigung stofflicher Verluste **20**, 70.

- Böckmann, K., Krüger, H. und Recknagel, E., Bestimmung des elektrischen Quadrupolmomentes des Zn⁶⁷-Kerns durch Messung der Hochfrequenzübergänge im 4³P₁-Zustand des Zn⁶⁷-Atoms. **20**, 250.

- Böer, K. W. u. Kümmel, U., Über den Einfluß dielektrischer Nachwirkungen auf den Leitungsvorgang von CdS-Einkristallen im Bereich der Durchschlagsfeldstärke **20**, 303.

- Brauer, W., Über das Bremsgesetz mittelschneller Elektronen in Metallen **20**, 390.

- Brauer, W. u. Klose, W., Zur Theorie des Oberflächeneffekts der Sekundär-emission **19**, 116.

- Burkhardt, W., Kernprozesse in Uranerzen **20**, 184.

C

- Clerc, H. G. u. Wallis, G., Die optische Absorption, die photoelektrische und thermische Emission und die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit von Caesium-Wismut-Schichten verschiedener Zusammensetzung **19**, 344.

E

- Ebert, G., vgl. Pfeifer, H., **20**, 322.
Eckart, F., Verhalten des Dunkelstromes von unfokussierten Sekundärelektronen-Vervielfachern mit Cs₂Sb-Photokathoden **19**, 133.

- Eckart, F. u. Fritzsché, C., Einfluß des Ausgangskupfers auf die Eigenschaften von Kupferoxydulgleichrichtern **19**, 19.
Eckart, F. u. Rabenhorst, H., Dielektrizitätskonstante von amorphem und kristallinem Selen bei 3,3 cm Wellenlänge **19**, 381.
Erma, V. A., Zur Thomas-Fermischen Gleichung bei hohen Temperaturen **20**, 345.

F

- Friedrich, H. u. Seiwert, R., Stöße zwischen angeregten Cadmium-Atomen und Caesium-Atomen **20**, 215.

- Fritzsché, C., vgl. Eckart, F., **19**, 19.

G

- Geck, F. W. u. Hanle, W., Das differentielle Anregungsvermögen vom α -Teilchen in lumineszenzfähigen Kunststoff-Folien **20**, 142.

Gerlach, W. u. Kranz, J., Über die Auswertung ferromagnetischer Gesteinsmessungen **20**, 280.

Gersch, U. u. Lösche, A., Untersuchungen der paramagnetischen Kernresonanzabsorption im Kondensatorfeld **20**, 167.

Glaskow, N., vgl. Pose, H., **20**, 4.

H

Hanle, W., vgl. Geck, F. W., **20**, 142.

Hanle, W. u. Schmidt, K., Über den Gas-Szintillationszähler **20**, 173.

Hartmann, W., Über einen Fotovervielfacher mit steuerbarer Kathodenfläche **20**, 247.

Hegenbarth, E., Über einige Anomalien der Hysteresisschleife bei keramischem Bariumtitanat und Piezolan **20**, 20.

v. Heimendahl, M., vgl. Simon, H., **20**, 355.

Helmis, G., Zur Theorie der Störstellen-Elektronen. II. Strahlungslose Übergänge **19**, 41.

Hentze, G., Entwicklung von eisenarmen Elektronenschleudern mit einer Betriebsfrequenz von 2,5 kHz und 8,0 kHz **19**, 55.

Hertz, G., Widmung zum 70. Geburtstag **20**, 1.

Höhne, M., Zur Abhängigkeit der Ionenleitfähigkeit des Silberbromids von der Vorgeschichte des Kristalls **20**, 412.

Houtermans, F. G., Jäger, E., Schön, M. u. Stauffer, H., Messungen der Thermolumineszenz als Mittel zur Untersuchung der thermischen und der Strahlungsgeschichte von natürlichen Mineralien und Gesteinen **20**, 283.

I

Irie, F., The Existence Domain of Complex Dielectric Constant of Binary Mixture **19**, 31.

J

Jäger, E., vgl. Houtermans, F. G., **20**, 283.

Jaeckel, R. u. Junge, H., Messung der Abgabe von in Reinstiesen gelöstem Stickstoff ins Vakuum **20**, 331.

Junge, H., vgl. Jaeckel, R., **20**, 331.

K

Kästner, S., Das Reflexionsvermögen und die Durchlässigkeit eines Schichtsystems visko-elastischer Medien bei Einfall einer ebenen Schallwelle unter beliebigem Winkel. II. **19**, 102.

Kanter, H., Zur Rückstreuung von Elektronen im Energierbereich von 10 bis 100 keV **20**, 144.

Kaschluhn, F., Zur spezifischen Wärme der Metallelektronen **19**, 94.

Kersten, M., Zur Wirkung der Versetzungen auf die Anfangspermeabilität von Nickel im rekristallisierten und im plastisch verformten Zustand **20**, 337.

Kischel, K., Zur Theorie elektrischer Wellen in inhomogenen Plasmen **19**, 309.

Klose, W., vgl. Brauer, W., **19**, 116.

Kockel, B., Die 1S -Zustände des Heliums **20**, 53.

Kopfermann, H., Krüger, L. u. Steudel, A., Über die Isotopieverschiebung im Spektrum des Gadoliniums **20**, 258.

Kranz, J., vgl. Gerlach, W., **20**, 280.

Krebs, K. u. Winkler, R., Die Hyperfeinstruktur des Grundzustandes des Europiums **20**, 60.

Krüger, H., vgl. Böckmann, K., **20**, 250.

Krüger, L., vgl. Kopfermann, H., **20**, 258.

Kümmel, U., vgl. Böer, K. W., **20**, 303.

L

Leistner, M., Ultraschalleinwirkung auf die Lumineszenz von Zinksulfid-Leuchtschirmen bei kontinuierlicher Anregung mit Licht **20**, 129.

Lensch, K.-P., Erzeugung weicher Röntgenstrahlen in einer Röhre mit Raumladungsgitter **19**, 262.

der
tem
331.
gen
eicht-
bei
ter
ek-
bis
me
er-
tät
im
37.
her
99.
16.
ns
u-
ng
8.
0.
r-
es
0.
3.
af
-
g
-
-

Lenz, F., Zur Berechnung von rotations-symmetrischen Potentialfeldern in Elektronenlinsen **19**, 82.

Lippmann, H. u. Weber, K.-H., Linien-formen der magnetischen Protonen-resonanzabsorption in kristallinen Flüssigkeiten **20**, 265.

List, G., Zum Mechanismus des Feld-durchschlages komprimierter Gase **20**, 238.

List, G., Über die Durchschlagsspannung und die Zündverzögerung in Stickstoff bei höherem Druck **19**, 283.

Lösche, A., vgl. Gersch, C., **20**, 167.

Lösche, A., Einige Bemerkungen zum Bloch-Siegert-Effekt und über Aus-wirkung desselben auf Doppelfrequenz-experimente **20**, 178.

M

Macke, W., Das quantenmechanische Viel-teilchenproblem bei Atomkernen und Elektronengasen **20**, 80.

Macke, W., Zur Absättigung der Kern-kräfte **19**, 89.

Mašin, A., Bestimmung der mosaik-artigen Struktur der Kristalle des ange-lassenen Martensits mittels eines Elektronenmikroskops **19**, 257.

Mathur, S. S., vgl. Parthasarathy, S., **19**, 242.

Meister, H. J., Die Bewegungsgleichun-gen in der allgemeinen Relativitäts-theorie **19**, 268.

Müller, H., Zur Frage der stationären Be wegung eines einfachen Makromoleküll-modells im strömenden Medium **19**, 304.

Müller, E. W., Betriebsbedingungen des Tieftemperatur-Feldionenmikroskopes **20**, 315.

N

Náray, Zs., Die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes der Sb-Cs-Photo-kathoden im Temperaturbereich —170°C bis +20°C **20**, 386.

P

Pachner, J., Ein Variationsprinzip für klassische Feldtheorien **19**, 353.

Pachner, J., Über die Kompatibilität der Feldgleichungen, Erhaltungssätze und Bewegungsgleichungen in der unitären Feldtheorie **20**, 368.

Papapetrou, A., Über periodische nicht-singuläre Lösungen in der allgemeinen Relativitätstheorie **20**, 399.

Parthasarathy S. and Mathur, S. S., Ultrasonic Absorption by Steady Thermal Method **19**, 242.

Perthel, R. u. Andrä, W., Magnetische Elementarbereiche in Mangan-Antimon **19**, 265.

Pfeifer, H., Winkler, H. u. Ebert, G., Die Messung kernparamagnetischer Relaxationszeiten mit Spin-Echos und freier Induktion **20**, 322.

Pfotzer, G., Über die Dauer der Emission und die Steinheit des Impulsspektrums der solaren Ultrastrahlung bei der chromosphärischen Eruption am 23. 2. 1956 **20**, 26.

Popp, G. u. Walcher, W., Über ein Ionemikroskop zur Untersuchung von biologischen Gewebeschritten **20**, 293.

Pose, H. u. Glaskow, N., Unelastische Streuung von Photoneutronen im Energiebereich von 0,3 bis 1 MeV **20**, 4.

Pütter, P. S., Zur Statistik der Systeme gleicher Teilchen. Die exakten dynami-schen Grundgleichungen der klassi-schen Statistik **19**, 145.

Pütter, P. S., Anwendung der dynami-schen Grundgleichungen der klassischen Statistik **19**, 247.

R

Rabenhorst, H., vgl. Eckart, F., **19**, 381.

Recknagel, E., vgl. Böckmann, K., **20**, 250.

Richter, G., Zur Isotopentrennung durch Destillation **20**, 45.

Riehl, N., Über die elektrische Leitfähig-keit fester organischer Isolatoren **20**, 93.

Rother, H., Über den Einfluß der Konvektion auf einen Lichtbogen **20**, 230.

Sch

Schmidt, H. W., Raumladungerscheinungen beim Betatron **19**, 298.

Schmidt, K., vgl. Janle, W., **20**, 173.

Schmutzler, E., Minkowski-Elektrodynamik als Ergebnis einer feldtheoretischen Untersuchung **20**, 349.

Scholz, A., Photochemische Erscheinungen in sensibilisierten AgCl-Kristallen für den Temperaturbereich von -185°C bis $+20^{\circ}\text{C}$ **19**, 175.

Schön, M., vgl. Houtermans, F. G., **20**, 283.

Schuster, K., Turbulenz und Wellen-anfachung **20**, 381.

Schwartz, W., Elektronenmikroskopische Untersuchung magnetischer Pulvermuster **19**, 322.

S

Seiwert, R., vgl. Friedrich, H., **20**, 215. Simon, H. u. v. Heimendahl, M., Über die Ausmessung von Röntgeninterferenzen mit Cadmiumsulfidzellen **20**, 355.

Stauffer, H., vgl. Houtermans, F. G., **20**, 283.

Steudel, A., vgl. Kopfermann, H., **20**, 258.

Stolz, H., Zur Theorie der elektrischen Leitfähigkeit von Halbleitern bei hohen Frequenzen. I. **19**, 394.

T

Teltow, J., Zum elastischen Störstellenmodell **19**, 169.

Treder, H., Stromladungsdefinition und elektrische Kraft in der einheitlichen Feldtheorie **19**, 369.

V

Varshni, Y. P., Thomas-Fermi Model for Diatomie Hydrides **19**, 233.

Vogler, G., Untersuchungen über den inneren Entmagnetisierungsfaktor **19**, 229.

Volke, C., Photochemie in sensibilisierten Silberhalogenidkristallen **19**, 203.

Volmer, M., Gustav Hertz 70 Jahre **20**, 1.

W

Wagenbreth, H., Zum Benedicks-Effekt an Quecksilber **19**, 166.

Walcher, W., vgl. Popp, G., **20**, 293.

Wallis, G., vgl. Clerc, H. G., **19**, 344.

Weber, K. H., vgl. Lippmann, H., **20**, 265.

Weller, W., Zur Diffusion von Antimon in Silber **20**, 42.

Wilhelmy, W., Eine Neubestimmung des gyromagnetischen Verhältnisses des Protons **19**, 329.

Winkler, R., vgl. Krebs, K., **20**, 60.

Winkler, H., vgl. Pfeifer, H., **20**, 322.

Wolter, H., Über die prinzipiellen Meßfehlergrenzen bei Schlieren- und Interferenzverfahren **19**, 1.

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Mögliche, Berlin. für den Anzeigenteil:
VEB Georg Thieme, Anzeigenabteilung, Leipzig C 1, Thomaskirchhof 20, Ruf 21005. Z. Z. gilt
Anzeigenpreisliste Nr. 4. Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstraße 18B,
Fernruf: 63105, 63781. ZLN 5066

Printed in Germany

Druck: Paul Dünnhaupt, Köthen (IV/5/1) L 209/37

PRESSLER



PHOTOZELLEN

für Wissenschaft und Technik

DEUTSCHE GLÜHGLÄMPEN-GESELLSCHAFT
PRESSLER
LEIPZIG C1. BERLINER STR. 69

Wissenschaftliche Selbstbiographie

von MAX PLANCK

3. Auflage,
34 Seiten m. 1 Bildnis. 1955.
DIN A5. DM 1.35

(= Heft 5 „Lebensdarstellungen
deutscher Naturforscher“)

JOHANN AMBROSIUS BARTH /VERLAG/ LEIPZIG

Kernmomente

Von Prof. Dr. HANS KOPFERMANN

Direktor des Ersten Physikalischen Institutes der Universität Heidelberg

2., neubearbeitete Auflage

XVI, 463 Seiten mit 197 Abbildungen. 1956. Gr.-8°.
Ganzleinen DM 54.—

Inhalt: I. Kernmomentuntersuchungen an freien Atomen. — II. Kernmomentuntersuchungen an freien Molekülen. — III. Kernmomentuntersuchungen an Flüssigkeiten und Kristallen. — IV. Kernmomente und Kernmodelle.

Die Technik: Das sehr komplexe Gebiet hat in dem vorliegenden Buch eine ausgezeichnete und sehr konzentrierte Darstellung gefunden. Für diejenigen Physiker, die sich künftig mit den Ergebnissen der Kernmomentforschung beschäftigen, wird dieses Buch unentbehrlich sein.

von Ardenne

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT MBH.
Frankfurt/Main

Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen

Von Prof. Dr. phil., Dr.-Ing. e. h. JULIUS WALLOT

Honorarprofessor an der Technischen Hochschule Karlsruhe

2., verbesserte Auflage

XII, 220 Seiten. 1957. Gr. 8°. DM 14.70, Leinen DM 16.35

„Zeitschrift für Naturforschung“: „Das Buch ist nicht nur ein sicherer, sondern auch ein angenehmer Wegweiser durch das behandelte, oft als trocken verschränkte Gebiet, denn es ist überaus anregend und ohne Aufwand an mathematischen Methoden geschrieben. Es beendet zudem in überzeugender Weise den Meinungsstreit über so viele Fragen, daß es aller Wahrscheinlichkeit nach auf lange Zeit hinaus das grundlegende Werk auf seinem Gebiet sein wird.“

Johannes Fischer (Karlsruhe)

JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Neuerscheinungen:

Kristallchemie und Kristallphysik metallischer Werkstoffe

Von Dr. FRANZ HALLA, Brüssel

Em. Prof. an der Technischen Hochschule Wien
Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Association pour les Études Texturales, Brüssel

3., umgearbeitete Auflage

1957. XVI, 737 Seiten mit 365 Abbildungen im Text und auf einer Tafel. Gr. 8°.
DM 50.—, Ln. DM 52.—

Angewandte Chemie: „Das Buch von Halla, das in erster Auflage 1939 erschien, ist nunmehr stark verändert und erweitert neu herausgekommen. Man könnte das Werk auch als Lehrbuch der Metallkunde unter besonderer Berücksichtigung der Strukturlehre bezeichnen. Das Werk stellt eine bewundernswerte Leistung des Verfassers dar, der aus zahlreichen Einzelveröffentlichungen ein außerordentlich großes Tatsachenmaterial zusammengetragen hat. Das Buch bildet ein wertvolles Bindeglied zwischen voneinander weit entfernten Arbeitsgebieten der Physik, Chemie, Metallkunde und der Technik. Es kommt daher für einen großen Interessentenkreis in Frage und wird als ein Lehr- und Nachschlagewerk mit Nutzen verwendet werden.“

G. Wassermann

Anleitung zur Analyse der Lösungsmittel

Von Dr. sc. nat. KURT THINIUS, Diplom-Chemiker

Direktor des Instituts für Chemie und Technologie der Plaste, Leipzig

2., erweiterte Auflage

1957. 89 Seiten mit 7 Abbildungen im Text. Gr. 8°. DM 4.50

Zentralblatt für Arbeitsmedizin und Arbeitsschutz: „Auf nicht zu großem Raum ist hier in zusammengedrängter und doch gut vermittelnder und ausführlicher Weise eine wirklich große Fülle analytischen Materials zusammengestellt, das jedem Fachmann eine willkommene, schnelle Orientierung über die chemischen Erkennungsreaktionen der Lösungsmittel vermittelt. Die Schrift ist nicht nur von Bedeutung für die industrielle Fertigung von chemischen Stoffen, deren Qualität allzuoft von dem verwendeten Lösungsmittel bestimmt wird, sondern trägt auch zur Klärung der immer mehr auftauchenden gewerbehygienischen Aufgaben und Fragen bei.“

F. Holschneider

Die Adsorption von organischen Verbindungen an der Trennungsfläche Metall/Elektrolytlösung und ihre Einwirkung auf elektrochemische Vorgänge

Von Prof. Dr. A. N. FRUMKIN, Moskau

1957. 19 Seiten mit 11 Abbildungen im Text. Gr. 4°. DM 1.60

(Bildet: Nova Acta Leopoldina. Abhandlungen der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina. Neue Folge, Nr. 132, Band 19)

Viele organische Verbindungen werden an der Trennungsfläche Metall/Elektrolytlösung adsorbiert. Diese Erscheinungen sind von besonderer Bedeutung, weil die Adsorption von organischen Verbindungen elektrochemische und Korrosionsvorgänge stark beeinflussen kann. Der Verfasser berichtet in seinem Vortrag, den er am 26. Februar 1957 in der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina in Halle gehalten hat, über seine eigenen Arbeiten auf diesem Gebiet sowie über die Forschungsergebnisse anderer russischer Wissenschaftler. Das Heft wird deshalb in Interessentenkreisen besondere Beachtung finden.

JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

7147

